UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
CAMPUS II – ALAGOINHAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET
PÓS GRADUAÇÃO *LATO SENSU* EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ANAILZA DA SILVA CAZUMBÁ

ASPECTOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO REVELADOS POR PROFESSORES EM ATIVIDADES ENVOLVENDO PADRÕES MATEMÁTICOS

Alagoinhas
2016

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
CAMPUS II – ALAGOINHAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET
PÓS GRADUAÇÃO *LATO SENSU* EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ANAILZA DA SILVA CAZUMBÁ

ASPECTOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO REVELADOS POR PROFESSORES EM ATIVIDADES ENVOLVENDO PADRÕES MATEMÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade do Estado da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática, sob orientação da Professora Doutora Grace Dórea Santos Baqueiro.

Alagoinhas
2016

ANAILZA DA SILVA CAZUMBÁ

ASPECTOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO REVELADOS POR PROFESSORES EM ATIVIDADES ENVOLVENDO PADRÕES MATEMÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade do Estado da Bahia – UNEB para obtenção do título parcial de Especialista em Matemática.

Alagoinhas, __________de ________________________________de 2016.

Banca Examinadora

____
Prof.ª Dr. ª Grace Dórea Santos Baqueiro
Orientadora

____
Prof.ª Dr. ª Maria de Fatima Leal
Universidade do Estado da Bahia

____
Prof.ª Msc.ª Érica Nogueira Macêdo
Universidade do Estado da Bahia

Dedico este trabalho aos meus pais, Ailton e Ana, como forma de agradecimento pelo exemplo de luta constante, apoio e dedicação tornando possível a concretização de mais um sonho; aos meus irmãos, Anailton e Anaildes, que mesmo com a distância sempre me deram força; ao pai do meu filho, João Henrique, que se disponibilizou a ajudar-me, cuidando de Gabriel, nos finais de semana dos encontros e na construção desse trabalho; ao meu filho, Henri Gabriel, que mesmo sem entender minhas longas ausências, sempre foi muito carinhoso.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar por me conceder saúde, força, perseverança, paciência, e sabedoria para saber administrar todos os desafios que me foram apresentados nessa caminhada. Ainda agradeço a Ele, por escolher as pessoas que cruzariam o meu caminho, delegando a elas o papel importante de contribuir uma a uma neste percurso.

Aos meus pais, Ailton e Ana, que contribuíram direta e indiretamente para que eu pudesse celebrar mais esta conquista. Obrigada pai, por se fazer presente nos momentos mais necessários da minha vida. Obrigada mãe, por ajudar mais uma vez dando-me força e ficando com meu filho nos finais de semana das aulas.

Aos meus irmãos, Anailton e Anaildes, por estarem ao meu lado, apoiando e encorajando-me a não desistir.

Ao meu filho, Gabriel, que é e sempre será o grande motivo de continuar seguindo em frente ainda que as dificuldades permaneçam, almejarei mais e mais.

Ao pai do meu filho, João Henrique, que também se disponibilizou nos finais de semana, muitas vezes, sacrificando-se no trabalho para ajudar-me.

A minha orientadora, chefa, comadre e mãe adotiva Grace, como sempre, ajudando e encorajando a prosseguir, talvez ela não saiba o quanto vem contribuindo para o meu crescimento pessoal e profissional até aqui. Mais uma vez me orientou neste momento oportuno, puxou minhas orelhas quando necessário e está sempre me encorajando a obter sucesso.

Aos meus comparsas de todas as horas Diego, Alexsandro, Pitágoras e Midiele por seguiram firme ao meu lado em mais essa jornada. Muito obrigada, pois sem vocês talvez eu não chegasse até aqui. Amizades verdadeiras que levarei para vida inteira!

Ao grupo de estudo TCC III, composto por Ana Teresa, Gabriele e Jadna que receberam-me de braços abertos e compartilharam todo o seu conhecimento e, em especial ao esposo de Ana Teresa, Djalma por todo apoio quando precisei, ao ficar com as crianças em todos os nossos encontros, às terça durante a noite.

Aos colegas de trabalho da Seduc de Aramari/Ba e da Escola Mário C. Filho, ao compreenderem que algumas ausências foram necessárias para a concretização deste trabalho.

Enfim as professoras Erica, Fátima, Maridete, Eliana e Jaíra, pois, estiveram sempre dispostas a colaborar com as minhas solicitações desesperadas.

“Ninguém nega o valor da educação e que um bom professor é imprescindível. Mas, ainda que desejem bons professores para seus filhos, poucos pais desejam que seus filhos sejam professores. Isso nos mostra o reconhecimento que o trabalho de educar é duro, difícil e necessário, mas que permitimos que esses profissionais continuem sendo desvalorizados. Apesar de mal remunerados, com baixo prestígio social e responsabilizados pelo fracasso da educação, grande parte resiste e continua apaixonada pelo seu trabalho.
A data é um convite para que todos, pais, alunos, sociedade, repensemos nossos papéis e nossas atitudes, pois com elas demonstramos o compromisso com a educação que queremos. Aos professores, fica o convite para que não descuidem de sua missão de educar, nem desanimem diante dos desafios, nem deixem de educar as pessoas para serem “águias” e não apenas “galinhas”. Pois, se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela, tampouco, a sociedade muda”.

(Paulo Freire)

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo analisar os caracterizadores do Pensamento Algébrico revelados por professores de Matemática, por meio de atividades envolvendo padrões. Esse objetivo se desdobra na seguinte questão de pesquisa: Quais os caracterizadores do Pensamento Algébrico são revelados por professores de Matemática ao resolverem atividades envolvendo padrões? Para tal, utilizamos como referencial teórico alguns dos aspectos do Pensamento Algébrico presentes em Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) ampliados por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), além dos estudos sobre atividades envolvendo generalização de padrões apresentadas por Vale *et al* (2011). Realizamos uma análise de natureza qualitativa, com caráter exploratório, por meio de um questionário misto. Os dados foram coletados com a participação de 7 professores de matemática de dois municípios (denominados de A e B), próximos a cidade de Alagoinhas/Ba. Os resultados mostram que de fato, atividades envolvendo padrões matemáticos possuem um grande potencial para o estudo dos aspectos do Pensamento Algébrico, pois, mediante a análise dos dados, todos os professores pesquisados revelaram alguns dos caracterizadores esperados, mas concluímos que os docentes sentem dificuldades em expressar seu pensamento, seja por meio de uma linguagem simbólica ou corrente.

Palavras-Chave: Pensamento Algébrico. Generalização de Padrões. Professor de Matemática.

ABSTRACT

This research aims to analyze the characterizing of algebraic thinking exposed by mathematics teachers, through activities involving standards. This aim encompass the following research question: What are characterizing the algebraic thinking exposed by mathematics teachers to solve activities involving standards? To do this, we use as a theoretical some aspects of algebraic thinking present in Fiorentini, Miorim and Miguel (1993) expanded by Fiorentini, Fernandes and Cristóvão (2005), in addition to studies about activities involving generalization patterns presented by Vale *et al* (2011). We conducted an analysis qualitative, with exploratory way, through a mixed questionnaire. Data were collected with the participation of 7 mathematics teachers in two cities (designated A and B), near the Alagoinhas/Ba city. The results show, in fact, activities involving mathematical standards have great potential for the study of aspects of algebraic thinking, therefore, by analyzing the data, all the surveyed teachers exposed some of the expected characterizing, but concluded that teachers have difficulty in express their thoughts, either through a symbolic or everyday language.

Key Word: Thinking Algebraic. Generalization Standards. Maths Teacher.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADRO

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Pesquisas e debates sobre a inserção das tendências na área da Educação Matemática tem sido de grande importância para aperfeiçoar o processo de ensino-aprendizagem. Na educação algébrica esses debates estão ganhando evidência pela necessidade de transformar o ensino da álgebra para além de um mero conjunto de manipulações de fórmulas a serem aplicadas. Segundo Vale *et al* (2011):

> Os professores de matemática estão conscientes do facto de que há, por um lado, pouco interesse na matemática e, por outro, um declínio na capacidade matemática dos alunos, que talvez se prenda com o facto de muitos alunos verem a Matemática como uma mera coleção de procedimentos a aprender. (p. 9)

Portanto é preciso apresentar ao aluno, novas formas de ensino da álgebra, ou seja, devemos ensinar não só o desenvolvimento dos cálculos, mas também o Pensamento Algébrico. Sendo assim, tomamos como base as atividades envolvendo padrões matemáticos e buscamos em alguns autores como Baqueiro (2016), Modanez (2003), Silva (2009), Almeida (2006), Santos (2008), Castro (2009), a possibilidade para o desenvolvimento no ensino algébrico, com o objetivo de analisar os caracterizadores do Pensamento Algébrico revelados por professores de Matemática e com base nas leituras, levantamos o seguinte questionamento: Quais os caracterizadores do Pensamento Algébrico são revelados por professores de Matemática ao resolverem atividades envolvendo padrões?

Buscando responder a essa questão da pesquisa, utilizamos como referencial teórico alguns dos aspectos do Pensamento Algébrico presentes em Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) ampliados por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), além dos estudos sobre atividades envolvendo generalização de padrões apresentadas por Vale *et al* (2011).

Desta forma, essa pesquisa aborda no capítulo I a problemática e a revisão de literatura das pesquisas feitas sobre o tema Pensamento Algébrico.

O capítulo II apresenta as ideias principais dos referenciais teóricos adotados sobre os Caracterizadores do Pensamento Algébrico e o estudo de Padrões em Matemática.

O capitulo III aborda as escolhas metodológicas e procedimentos demonstrando a caracterização do lócus e apresentação dos sujeitos da pesquisa, bem como, instrumento utilizado para a pesquisa, às técnicas adotadas na análise dos dados, e a organização dos questionários coletados para levantamento da pesquisa.

O capítulo IV contempla a análise dos dados coletados por meio do questionário que está dividido em quatro partes para análise.

Por fim, o capítulo V com as considerações finais ressalta os principais resultados do nosso trabalho.

CAPÍTULO I
1 PROBLEMÁTICA

1.1 MINHA TRAJETÓRIA ATÉ A ESCOLHA DO TEMA

Visando uma melhor compreensão sobre os motivos que levara-me à escolha do tema Observação e generalização de padrões, irei fazer uma breve explanação das minhas vivências, a fim de nortear o leitor.

Minha paixão por matemática foi despertada na sétima série do ensino fundamental II, por intermédio da minha professora, pois, a mesma não informava a nota que tirávamos na unidade, apenas dizia na sala, quem perdeu e quem passou. Angustiada por ter perdido em uma das unidades, fui procurar um reforço escolar, que me deu a oportunidade de resolver todas as questões propostas pelo livro. Sabendo que já tinha resolvido todas as atividades, a professora me colocou como monitora das aulas de matemática para auxiliar os colegas com dificuldades. A partir deste momento, surgiu o interesse pela matéria e pela docência.

Desde então, passei a me esforçar e por consequência destacar-me nas aulas de matemática, pois aquela atitude da professora tinha aumentado a minha autoestima e a vontade de estudar ainda mais. Segui o restante dos anos de escolaridade com esse desejo. Após concluir o ensino médio, fiz alguns vestibulares e não consegui êxito. Foi quando passei no curso técnico, voltado para a área de exatas, onde mais uma vez me destaquei. Muitos caminhos foram percorridos até a aprovação no vestibular, mas a vontade de tornar-me professora de matemática persistia.

Quando fui aprovada no curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia – UNEB, Campus II – Alagoinhas, tive a sensação de dever cumprido e realização de um desejo, no entanto, não sabia que ainda teria muitos obstáculos a superar. Quando iniciei o curso tinha a expectativa de que iria rever todos os conteúdos de matemática do ensino fundamental II até o ensino médio. Mas, logo veio a decepção, pois a proposta do curso não era essa. Pensei que seria igual à sétima série, na qual conseguia resolver todos os exercícios, apenas aplicando as fórmulas. Acreditava que isso era o bastante para saber matemática. Mas não foi assim, eu tive que estudar muito. Logo percebi que o conhecimento matemático do ensino básico não era suficiente para dar conta dos componentes do curso, que ia muito além da resolução de exercícios e aplicações de fórmulas.

Minhas maiores dificuldades diziam respeito, principalmente, as demonstrações, pois eu não conseguia "ver" significado nas anotações do professor expostas no quadro. Não conseguia generalizar algumas das situações dadas e, muitas vezes, para poder compreender tinha que recorrer a casos particulares.

Ainda em meio às minhas dificuldades, fui convidada pela coordenadora das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP a trabalhar como apoio secretarial. Em contato com as provas desta competição fui percebendo que as mesmas apresentavam questões de matemática interessantes, que estimulam o raciocínio do aluno. No entanto, muitos dos alunos participantes as deixavam em branco. Cheguei à conclusão que eles também sentiam dificuldades, assim como eu, em resolver esse tipo de atividade.

Neste mesmo período, participei do projeto de extensão intitulado *Estudando Matemática para as Olimpíadas – EMAPOL*, que acontecia na UNEB, onde tive meus primeiros contatos com textos voltados para a área da Educação Matemática através da leitura do artigo *Cenários de investigação* de Skovsmose (2000), e a parte 1 e 2 do livro *A arte de resolver problemas* de Polya (2006). Esses textos mostraram que é possível criarmos um "ambiente" em sala de aula que favoreça ao aluno aprender matemática de modo significativo, ou seja, utilizando boas atividades investigativas que os levem a resolver problemas matemáticos, construindo eles mesmos a solução.

Outro artigo estudado foi *A Observação e a Generalização de Padrões e seus Benefícios aos Alunos do Ensino Médio* de Cristiane Regina de Moura Ferreira e Prof.ª Dra. Silvia Dias Alcântara Machado (2008), no qual as autoras apresentam um recorte de uma pesquisa em andamento que foi motivada pela preocupação das mesmas em melhorar a compreensão e o desempenho dos alunos, mais especificamente nas dificuldades destes em efetuar os cálculos algébricos na transição da linguagem aritmética para a linguagem algébrica. As autoras realizaram estudos envolvendo pesquisas na área da Educação Algébrica e perceberam que uma possível solução seria a aplicação de atividades envolvendo a observação de regularidades e a generalização de padrões, que auxiliam no processo de ensino e aprendizagem de diferentes conteúdo da matemática.

Com a especialização veio à oportunidade de retomar as pesquisas sobre padrões, pois esse tema ainda aguçava minha curiosidade. Tive a oportunidade de estar presente em uma das discussões do grupo de estudos criado pela docente Grace Baqueiro, o Grupo de Pesquisa em Pensamento Matemático Avançado (GPEMA), formado inicialmente por três discentes, as quais tinham como intuito estudar generalizações de padrões e utilizá-los como fonte de pesquisa para o trabalho de conclusão de curso das mesmas. Com as discussões e com o convite em participar do grupo de estudos, não tive mais dúvidas que seria o tema que gostaria de pesquisar para a elaboração desta monografia.

Logo começamos a nos encontrar semanalmente na universidade e a discutir os textos enviados pela orientadora, os quais serviram como revisão de literatura desse trabalho. A seguir, apresentamos o resultado de algumas das pesquisas encontradas, onde tratavam do tema observação e generalização de padrões.

1.2 REVISÃO DE LITERATURA

Baqueiro (2016) realizou um estudo documental analisando as contribuições de pesquisadores em Educação Matemática sobre o tema Generalização de Padrões, utilizando ideias de Mason, Ferrini- Mundy, Lappan, Phillips e Devlin sendo alguns dos argumentos de Dreyfus sobre processos do pensamento matemático avançado. A autora "garimpou" teses e dissertações no período de 2003 a 2013 que tratavam da generalização de padrões. Estes trabalhos acadêmicos foram divididos em duas categorias: aquela em que a generalização é o tema secundário e a segunda em que é o tema principal. Através da segunda categoria, foi possível ter acesso a algumas pesquisas realizadas com professores de matemática, sendo que estes, fazem parte dessa revisão de literatura.

Baqueiro (2016), em sua conclusão, refere-se "a capacidade que atividades de generalização de padrões têm de desafiar a curiosidade dos sujeitos, possibilitando o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. A pesquisadora expõe também a importância das atividades com generalizações de padrões estarem presentes desde as séries iniciais da Educação Básica, sendo que as mesmas possibilitam aos professores e alunos as compreensões variadas de álgebra (principalmente a de álgebra como modo de pensar), inter-relacionando os diversos aspectos do Pensamento Algébrico.

Modanez (2003), por sua vez, nos mostrou que atividades envolvendo sequências de padrões geométricos podem proporcionar a introdução ao Pensamento Algébrico no 7º ano. Segundo a autora, no primeiro contato com essas atividades os alunos sentiram dificuldades para escrever as respostas e as justificativas, entretanto esse quadro foi mudando ao longo da aplicação da sequência, quando os estudantes passaram a ter "atitudes e autonomia no sentido de observar, levantar hipóteses, tirar conclusões, escrever, discutir e justificar suas respostas" (p. 87), deixando claro que o professor teve uma participação especial no amadurecimento e na mudança de comportamento dos alunos, principalmente nas fases de introdução e institucionalização pois, os questionamentos levantados pelo professor procuravam tirar do aluno a resposta satisfatória para cada atividade, sem interferir na sua criatividade, possibilitando a transição da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Mesmo assim, a autora chama atenção para a necessidade de melhor capacitar o professor para trabalhar com a introdução ao Pensamento Algébrico, fazendo uso de sequências de padrões geométricos tentando garantir um bom aprendizado por parte dos alunos.

Por sua vez, Silva (2009), com o objetivo de verificar como as atividades que envolvem observação e generalização de padrões são exploradas por professores que ministram aulas nas oficinas “Experiências Matemáticas” das Escolas em tempo integral, realizou uma pesquisa qualitativa e utilizou-se de entrevistas semiestruturadas com cinco professores dessas oficinas.

Para o pesquisador, a relevância de seu estudo se justifica pela importância do trabalho com observação e generalização de padrões, apontado por pesquisadores como Mason (1996b), Lee (1996) e Vale e Pimentel (2005) como recurso para que alunos manifestem o Pensamento Algébrico e criem expressões algébricas, dando sentido à utilização dos símbolos.

As análises das entrevistas indicaram que os professores trabalham com atividades de observação e generalização de padrões esporadicamente nas oficinas “Experiências Matemáticas”. Inferindo os possíveis motivos que levam estes docentes a não responder este tipo de atividade:

- Não ocorre pela desaprovação dos professores, mas sim pelo desconhecimento do tema e de sua relação com a matemática.
- Não estão cientes do objetivo principal do trabalho com esse tipo de atividade e, consequentemente, de seu benefício para os alunos.
- Embora o tema tenha comprovada relevância, ainda é muito pouco difundido.

Almeida (2006), buscou verificar se os professores do ensino fundamental, sendo este de escolas públicas estaduais de uma cidade do interior de São Paulo, trabalham atividades que envolvem a observação de regularidades e a generalização de padrões e, caso o façam, identifiquem as estratégias de resolução que os professores preveem que seus alunos venham a utilizar.

Para a coleta de dados, a pesquisadora realizou entrevistas semiestruturadas com cinco professores. Segundo a autora os dados da pesquisa evidenciaram que os professores trabalham de modo sistemático, ainda que esporadicamente com o tema em sala de aula do ensino público. Isso ocorre por motivos diversos como:

- Esperarem em geral, que seus alunos resolvam de forma intuitiva, ou seja, utilizando estratégia de desenho e contagem;
- Esperarem formas semelhantes àquelas que sugeriram trabalhar em sala de aulas com estratégias de resolução que envolvam generalização sem uma formalização algébrica mais rigorosa.

Ao investigar quais as mudanças de percepção dos professores sobre o tema observação e generalização de padrões, Santos (2008), observa que estes vivenciaram um processo de pesquisa em sua própria sala de aula. Os dados da pesquisa foram obtidos a partir da observação e intervenção nos processos de pesquisa-ação de duas professoras. Essas professoras participaram de um curso de formação continuada proposto pelo Projeto de “Valorização do Educador e Melhoria da Qualidade de Ensino da rede municipal de São Paulo a respeito de atividades de observação e generalização de padrões. Chegando as seguintes conclusões:

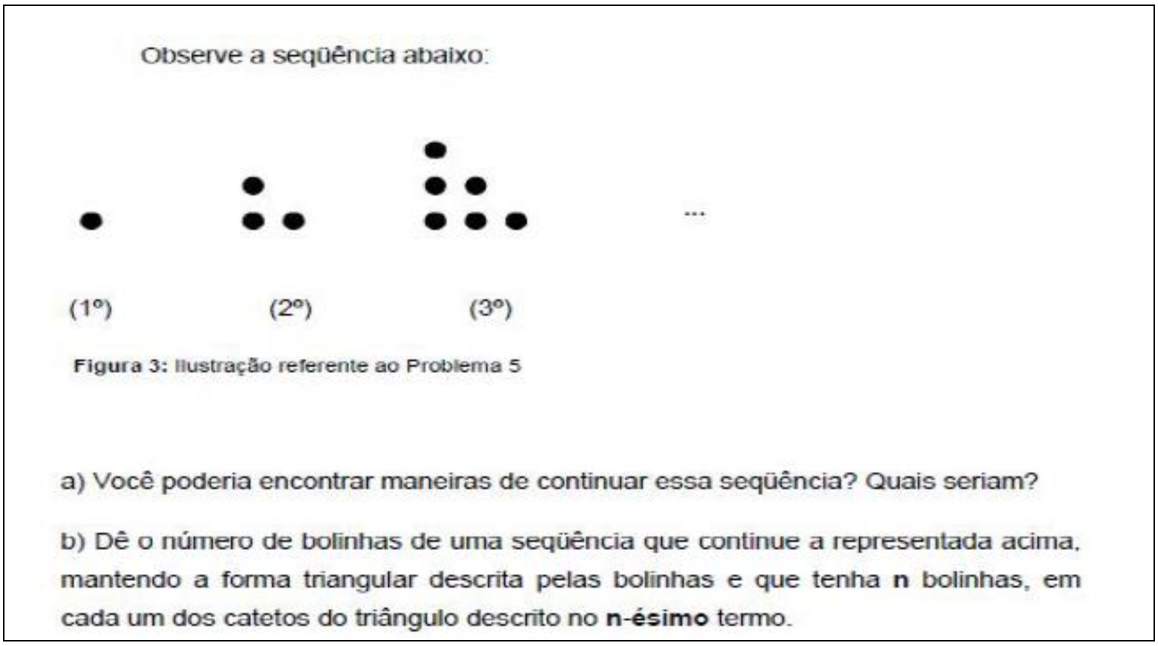
- Os professores notaram a importância do tema e passaram a localizar questões que envolvem padrões dentro de sua sala;
- O interesse mostrado pelos alunos, tornou-se significativo, ao resolverem tais atividades e sua opção por indicarem questões do livro, antes eram ignoradas;
- Indícios que são possíveis desenvolver atividades de observação e generalização de padrões em sala de aula oferecendo vantagens para professores e alunos;
- A investigação de padrões em sequências revelou-se um tema abrangente e estimulante para os professores, pois, a pesquisa-ação realizada por docentes lado a lado com pesquisadores, por um certo período de tempo, demonstrou ser um ambiente favorável a mudanças e ao aperfeiçoamento profissional.

De acordo com Santos (2008), em sua afirmação percebe-se que houve uma notável mudança no olhar dos professores durante a análise dos protocolos, que deixaram de classificar em certo e errado, e passaram a observar e compreender qual o raciocínio utilizados pelos alunos, sendo que:

> A investigação de padrões em sequências revelou ser um tema abrangente e estimulante para os professores e a pesquisa-ação realizada por professores lado a lado com pesquisadores por um período de tempo revelou ser um ambiente favorável a mudanças e ao aperfeiçoamento profissional de todos os envolvidos. (p. 7).

Castro (2009), faz uma análise dos aspectos do Pensamento Algébrico apresentado pelos professores/estudantes no curso de formação continuada em Educação Matemática, através de resoluções de problemas envolvendo a Álgebra. Aplicou cinco problemas abertos, sendo um deles envolvia padrões, por considerar que "a generalização de padrões é um dos aspectos do Pensamento Algébrico" (p.22), como ilustrado na figura seguinte

Figura 1: Atividade com Padrão



Fonte: Castro (2003, p.44)

Nesta atividade o autor verificou por meio das resoluções que os professores/estudantes apresentaram uma percepção e expressão de regularidade ou invariâncias, além de desenvolver algum tipo de generalização. Os resultados da pesquisa de Castro (2009), mostram que:

> Diversos aspectos caracterizadores do Pensamento Algébrico foram explicitados nos procedimentos dos professores estudantes e que esses nem sempre utilizaram a linguagem algébrica simbólica ao resolverem problemas envolvendo a Álgebra. Além

> disso, mostram que eles tiveram dificuldades em explicar os porquês de seus procedimentos e de dar justificativas matemáticas. (CASTRO, 2009, p. 8).

Percebemos na revisão de literatura a comprovação das pesquisas com as atividades envolvendo observações de regularidades que realmente levam os alunos a construírem noções algébricas. No primeiro contato com tais atividades, os estudantes podem sentir dificuldades para representar algebricamente, fazendo geralmente uso da linguagem natural. Mas, com a mediação do professor o cenário passa a mudar gradativamente. As pesquisas evidenciaram que docentes trabalham pouco com atividades desse gênero em suas aulas, por diversos motivos, dentre eles, a falta de conhecimento do tema. Neste sentido, percebemos a necessidade de “Analisar os caracterizadores do Pensamento Algébrico revelados por professores de Matemática, por meio de atividades envolvendo padrões”.

CAPÍTULO II
2 REFERENCIAL TEÓRICO

Para esta pesquisa tomamos como referencial teórico, os aspectos do Pensamento Algébrico desenvolvidos por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) e Vale *et al* (2011)

2.1. CARACTERIZADORES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Segundo Fiorentini *et al* (1993), o estudo da álgebra está presente na maior parte da educação escolar e pesquisas nessa área da matemática são de suma importância para uma melhor compreensão. Mas, segundo os referidos autores durante muito tempo essa área de conhecimento foi deixada de lado em detrimento da geometria. “Enquanto o ensino da geometria vem recebendo atenção especial por parte dos pesquisadores em Educação Matemática, o ensino da Álgebra parece relegado a um estado letárgico” (p.78).

Diante de tal situação, Fiorentini *et al* (1993), decidiram realizar estudos que procurassem explicitar a especificidade da álgebra e o papel por ela desempenhado na história do pensamento humano. Com o objetivo de repensar a educação algébrica elementar os autores fazem uma análise comparativa entre as concepções de educação algébrica e as concepções de álgebra, trazendo cinco leituras históricas que marcaram o desenvolvimento da álgebra, desde a sua separação em clássica e moderna até o surgimento das estruturas algébricas com Galois.

Ao fazer esse resgate histórico, baseado em Fiorentini *et al* (1993), observa-se três momentos tidos como importante para esta pesquisa do desenvolvimento da álgebra, sendo eles:

- A *retórica*, na qual não se fazia uso de símbolos nem de abreviações para expressar o Pensamento Algébrico;
- A *sincopada*, que se utilizou de uma forma mais abreviada para expressar equações;
- A *simbólica*, momento em que as ideias algébricas passam a ser expressas somente através dos símbolos.

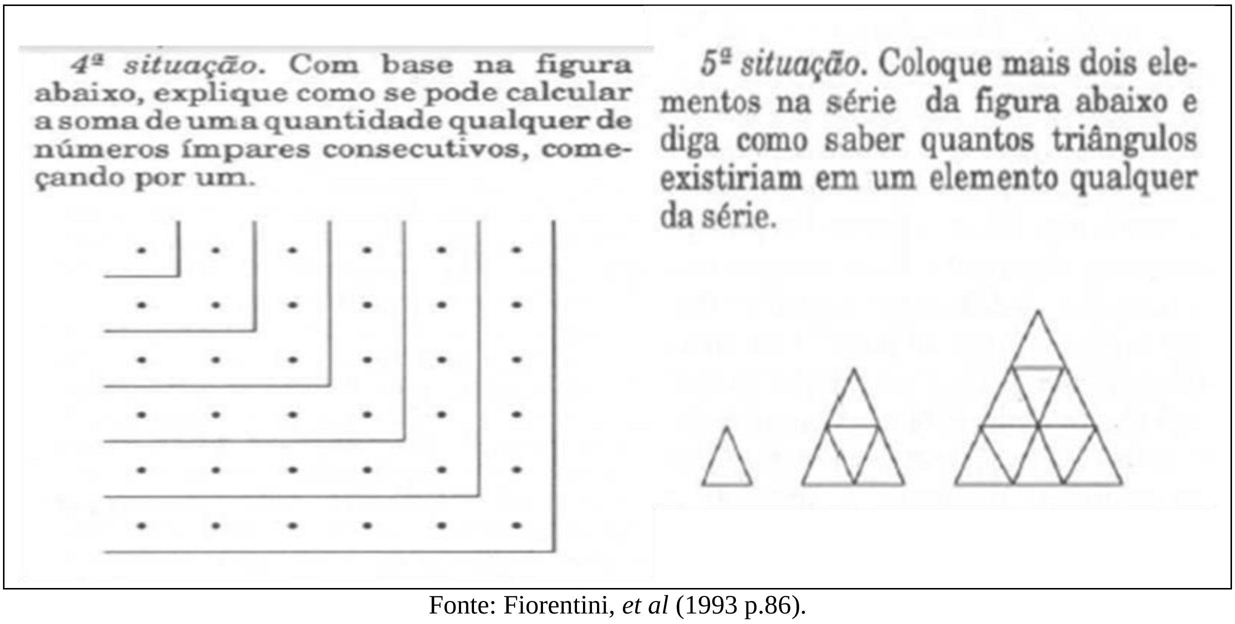
Diante de tal situação, os autores evidenciaram a comparação das concepções de álgebra e da educação algébrica chegando a conclusão que as duas concepções dão ênfase a linguagem simbólica em detrimento do Pensamento Algébrico, como afirma Fiorentini *et al* (1993):

> Se estabelecermos uma comparação entre as concepções de Álgebra obtidas a partir de várias leituras históricas do desenvolvimento desse campo, e as concepções de educação algébrica dominantes ao longo da história do ensino da Matemática, não é difícil concluir que existe uma certa consonância entre elas. De fato, do mesmo modo como as primeiras tenderam a priorizar a linguagem em detrimento do pensamento, também as últimas acabaram enfatizando o ensino de uma linguagem algébrica constituída, em detrimento da construção do Pensamento Algébrico e sua linguagem. (p.85).

Para os autores, existe entre o Pensamento Algébrico e a linguagem algébrica uma relação de natureza dialética, e não de subordinação, ou seja, uma não depende da outra para desenvolver, no entanto, contribuem no desenvolvimento da outra.

Para chegar a caracterização do Pensamento Algébrico, Fiorentini *et al* (1993), descrevem sete situações-problemas em que esse tipo de pensamento pode se manifestar. Dentre as situações apresentadas, daremos ênfase à análise de duas delas, a 4ª e a 5ª, pois fazem alusão a sequência de padrão geométrico, mais especificamente da observação e generalização de padrões. Como mostra a figura seguinte.

Figura 2: Situações-problema.



Fonte: Fiorentini, *et al* (1993 p.86).

Os pesquisadores destacam que para ter um bom cognitivo, os alunos têm que ter uma boa compreensão para alcançar o objetivo esperado uma vez que:

> A resolução satisfatória da quarta e quinta situações depende da percepção de uma regularidade por trás da série de padrões geométricos (a quantidade de pontos nos gnômons consecutivos da situação 4 ou a quantidade de triângulos em cada padrão triangular da situação 5). A percepção dessa regularidade conduz à possibilidade de expressar retórica ou simbolicamente $(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2;\ n \in N^*)$ a estrutura subjacente à totalidade desses padrões FIORENTINI *et al* (1993, p.88).

Após à análise das sete situações Fiorentini *et al* (1993), apresentaram quatro caracterizadores do Pensamento Algébrico, sendo eles: "percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outro que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização." Os autores chegaram à conclusão que os caracterizadores podem ajudar não somente no desenvolvimento do Pensamento Algébrico no campo da matemática, mas também, em outras áreas de conhecimentos e que não existe uma única forma de expressar esse pensamento, podendo se manifestar na linguagem natural, geométrica, aritmética ou simbólica.

Diante do exposto, Fiorentini *et al* (1993), determinaram algumas implicações que deram uma nova perspectiva para o trabalho pedagógico com a álgebra. A primeira implicação faz referência ao início do Pensamento Algébrico escolar que por sua vez, deve começar desde as séries iniciais pois não se tem ainda uma linguagem simbólica-formal, procurando desenvolver a percepção de regularidades e generalização; a segunda implicação faz referência ao papel da linguagem simbólica na Educação Algébrica; a terceira faz referência à grandeza do Pensamento Algébrico manifestado em todos os campos da matemática e em outras áreas de conhecimento; a quarta implicação de natureza didático-metodológica faz referência a três etapas do desenvolvimento da educação algébrica: 1) chegar a expressões simbólicas através da análise de situações-problema; 2) Caminho inverso da primeira, partir da expressão algébrica e montar uma situação-problema em cima disso; 3) transformar uma expressão algébrica em uma equivalente.

Já em 2005 no artigo "Um Estudo das Potencialidades Pedagógicas das Investigações Matemáticas no Desenvolvimento do Pensamento Algébrico", Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), investigaram as potencialidades pedagógicas das Investigações Matemáticas (IM) no ensino da álgebra elementar identificando, sobretudo, indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do Pensamento Algébricos. A pesquisa foi aplicada junto a duas classes do sexto ano do ensino fundamental II, de uma escola pública estadual no interior do Estado de São Paulo e contou com a colaboração de uma professora-parceira da escola.

Para alcançar seu objetivo os autores aplicaram duas tarefas de caráter exploratório-investigativas[1], sendo que uma das tarefas envolvia uma sequência com padrão de bolinhas e a outra desenvolvia a ideia de sequência como produtora de uma função através da "máquina mágica". De acordo Fiorentini *et al* (2005):

> Embora tenhamos planejado e aplicado duas tarefas investigativas nas duas classes, neste trabalho descrevemos e analisamos os resultados obtidos a partir da realização da segunda tarefa investigativa, pois esta buscou explorar de maneira intencional a mobilização e o desenvolvimento da linguagem e do Pensamento Algébricos. Antes disso, porém, tecemos algumas considerações sobre IM nas aulas de matemática e as principais concepções de educação algébrica, destacando principalmente os elementos caracterizadores do Pensamento Algébrico. (p. 2).

Para analisar as resoluções dos alunos, os pesquisadores descrevem três etapas de evolução do Pensamento Algébrico, que vai da fase *pré-algébrica* - quando o aluno utiliza algum elemento considerado algébrico, podendo por exemplo, serem usadas as letras. Mesmo que estes ainda não saibam reconhecê-las como número generalizado qualquer ou como variável, passando por uma *fase de transição* do aritmético para o algébrico, sobretudo quando o aluno aceita e concebe a existência de um número qualquer, estabelece alguns processos e generalizações, podendo ou não utilizar a linguagem simbólica, atingindo enfim, um *Pensamento Algébrico mais desenvolvido*, expressando capacidade de pensar e expressar-se genericamente, sobretudo quando o aluno aceita e concebe a existência de grandezas numéricas abertas ou variáveis dentro de um intervalo numérico, sendo capaz não só de ir além de expressá-las por escrito. Afinal, de acordo com Fiorentini *et al (*2005), estes estudos de investigações matemáticas, podem ser realizados por meio de tarefas exploratório-investigativas, levando os alunos a desenvolverem aspectos do Pensamento Algébrico. Portanto, para sua análise os autores complementam os caracterizadores do Pensamento Algébrico baseado no quadro seguinte.

---

[1] Fiorentini *et al* (2005), consideram que tarefas exploratórias tendem a ser mais livres e menos sistemáticas, geralmente utilizadas para produzir um novo tema, e que tarefas investigativas são situações-problema desafiadoras e abertas que permitem aos alunos inúmeras tentativas de exploração e investigação. Por não fazerem distinção entre elas, os autores utilizam a designação "tarefas exploratório-investigativas".

Quadro 1: Caracterizadores do Pensamento Algébrico, segundo Fiorentini *et al* (2005, p.5)

CARACTERIZADORES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO	
C_1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos;
C_2	Perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação problema;
C_3	Produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema ou expressão numérica;
C_4	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas;
C_5	Transforma uma expressão aritmética em outra mais simples;
C_6	Desenvolver algum tipo de processo de generalização;
C_7	Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias;
C_8	Desenvolve uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.

Fonte: (Fiorentini, Fernandes e Cristóvão, 2005 p.5).

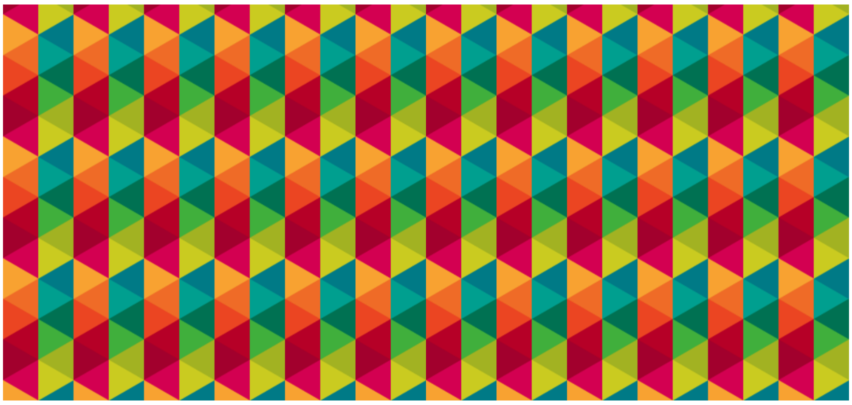
Os autores, supracitados, ressaltam que em seus trabalhos não se aprofundaram nas atividades exploratório-investigativas que envolviam sequências de padrões. Daremos ênfase nesta pesquisa às atividades desse gênero, tomando como base os caracterizadores apresentados pelos mesmos.

As leituras dos textos supracitados fortaleceram a ideia inicial da importância do meu tema de pesquisa, buscando despertar a relevância da utilização de atividades que envolvendo padrão que será aprofundado no próximo tópico, tendo como base Vale *et al* (2011), os quais apresentam no livro "Padrões em Matemática: Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico", algumas abordagens metodológicas mediante atividades envolvendo padrões matemáticos.

2. 2 PADRÕES MATEMÁTICOS

Segundo Vale *et al* (2011), a palavra padrão está muito presente no nosso cotidiano. Quando, nos deparamos com esse termo, associamos de imediato a padrões visuais tais como da figura seguinte.

Figura 3: Sequência de forma geométrica.



Fonte**:** http://www.thaisvilanova.com.br/site/portfolio/instituto-1dasul/ (2016)

Geralmente, imagens semelhantes são encontrados em papéis de parede, tecidos, azulejos, e outros. Neste caso, a figura está disposta entre cores e formas geométricas que se repetem seguindo um modelo, na qual denomina-se de Padrão. Pois, segundo Vale *et al* (2011, p. 09) o termo "é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades".

No que diz respeito à matemática, tentamos interpretar situações procurando padrões ou recorremos ao termo através da regularidade, sequência, sucessões, lei de formação e generalização, neste sentido, concordamos com Vale *et al* (2011), quando afirmam que:

> [...] um dos objetivos da Matemática é descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, ou seja, no meio da desordem e confusão, extrai-se a estrutura e a invariância. Pode mesmo considerar-se que a essência da matemática consiste em descobrir padrões e o nosso espírito parece estar estruturado para procurar relações. (p. 09).

Nesse sentido, quando estudamos matemática somos remetidos a encontrar a ordem escondida em algumas atividades propostas que de início ao olharmos parece não ter sentido algum. Os autores afirmam que procuram encontrar a ordem escondida e quando utilizam os padrões na matemática é porque querem ajudar os estudantes a dar um significado a Matemática, fazendo com que se envolvam com a disciplina, proporcionando uma aprendizagem mais significativa para os mesmos.

De acordo com Vale *et al* (2011), na matemática o estudo dos padrões atravessa os programas escolares desde a pré-escola até o ensino médio. Ainda segundo os autores, não se tem uma definição ou um conceito matemático de padrões, mas sabe-se que:

> Os padrões vão muito mais além da exploração de situações de repetição e do campo da geometria. A sua riqueza reside na sua transversalidade, tanto ao nível de conteúdos como das capacidades que promove nos estudantes de qualquer nível e, também na forte

> ligação que tem com a resolução de problemas, com atividades de exploração e de investigação. (VALE *et al*, 2005, p. 10).

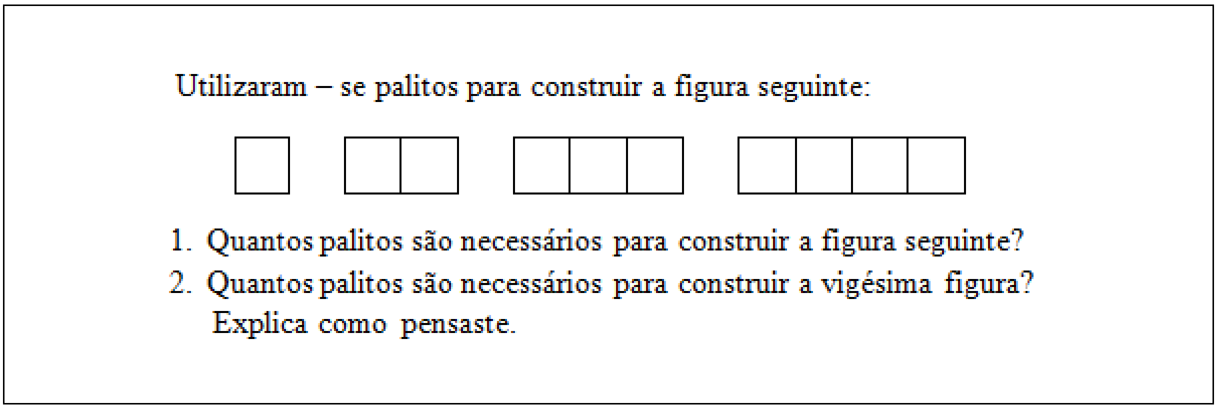
Dessa maneira, os padrões não se restringem apenas na repetição de situações, números ou figuras geométricas, vai além das repetições, propiciando novas situações a serem analisadas se estendendo em nível de raciocínios que independem da área estudada, despertando nos alunos a busca pelo raciocínio lógico e gosto pela matemática. Vale *et al* (2011), afirmam que a busca pelo raciocínio pode acontecer utilizando padrões como estratégia de resolução de problemas, pois, a aplicabilidade dessas resoluções não rotineiras e não tradicionais ajuda os alunos a se envolverem na busca de exploração e formalização dos padrões levando-os a conjecturar e a generalizar. “Trabalhar a álgebra através da resolução de problemas envolvendo padrões é possível abordagem ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico no ensino básico.” (VALE *et al* 2011, p. 14)

Conforme os autores, o Pensamento Algébrico faz alusão à simbolização, ou seja, analisa e representa situações matemáticas, utilizando-se da simbologia algébrica. Sendo assim, o Pensamento Algébrico vai muito além de uma mera manipulação de signos e símbolos através da resolução de equações.

De acordo com os pesquisadores, supracitados, o uso de atividades que envolvam padrões já são vistos por alguns autores como abordagem relevante da passagem da aritmética para álgebra, ajudando o aluno a perceber o real sentido da variável que ainda é vista pela maioria dos estudantes como um número desconhecido. “Trabalhar com padrões ajuda os alunos a procurar regularidades e relações e encoraja-os a generalizar” (VALE *et al* 2011, p.16), essas generalizações acontecem em dois níveis: generalização próxima e distante, sendo que primeiro tipo de generalização acontece quando, numa sequência, se pretende descobrir termos muito perto do que apresentamos já na generalização distante, quando os termos estão numa posição tal que dificilmente se poderão descobrir por exaustão.

Vale *et al* (2011), abordam alguns tipos dos padrões que podem ser vistos nas aulas de matemática, dentre eles estão os padrões de repetição, no qual existe um motivo identificável que se repete de forma periódica e os padrões de crescimento cada termo modifica de forma previsível em relação ao anterior, ou seja, satisfazendo sempre uma lei de formação, como pode ser visto na figura seguinte.

Figura 4: Exemplo de padrão de crescimento



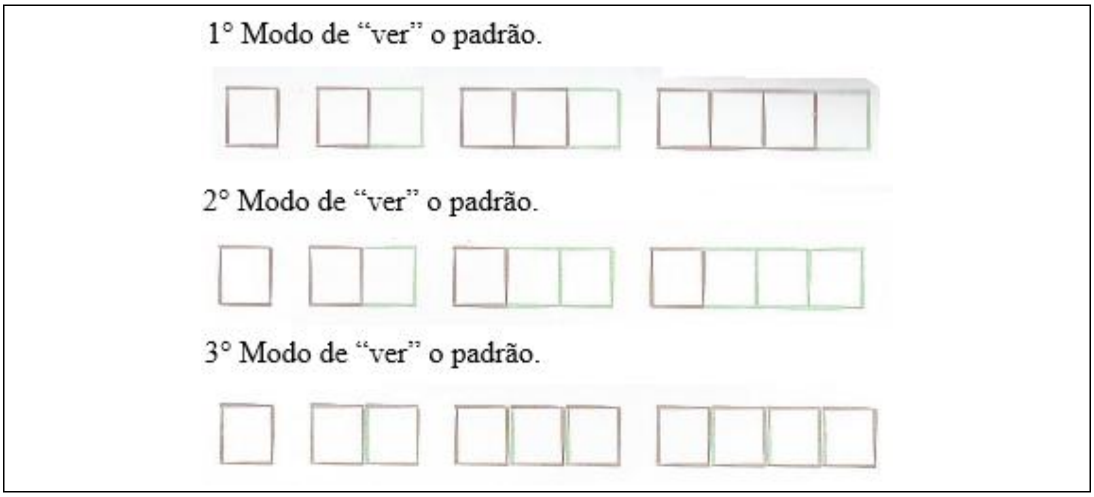
Fonte: Vale *et al* (2011, p. 27)

Neste sentido, os autores afirmam que “Ver” o padrão é o primeiro passo necessário para a exploração de padrões. Ver de diferentes modos pode, por exemplo, permitir que os estudantes de níveis elementares resolvam problemas que envolvam generalizações, quando tradicionalmente, só se poderiam resolver com uma matemática mais desenvolvida. “Ver” envolve, nesta perspectiva, decompor a figura inicial em partes que tenham significado para o aluno, permitindo-lhe mais facilmente identificar uma relação entre elementos que compõem a figura e a respectiva posição na sequência da qual faz parte. Simultaneamente, proporcionam um entendimento mais consistente das propriedades e das relações numéricas.

Analisando a atividade anterior (ver figura 4), Vale *et al* (2011) explicam, que para responder à primeira questão, geralmente desenha-se a figura correspondente ao termo consecutivo e contam-se os palitos um a um. Em relação à segunda questão, torna-se moroso e, por vezes, complicado recorrer à mesma estratégia utilizada anteriormente que exige desenhar vinte termos.

Os pesquisadores apresentam três modos diferentes de visualização do padrão para a atividade, como mostra na imagem que segue.

Figura 5: Possíveis visualizações do padrão para a atividade da figura 4



Fonte: Vale *et al* (2011, p. 27)

No primeiro modo, os autores afirma que provavelmente, os alunos usarão com maior facilidade um pensamento recursivo que lhes permitirão descobrir que cada termo se obtém adicionando três unidades ao termo anterior. Este tipo de raciocínio apenas permite efetuar uma generalização próxima. No segundo modelo a forma de visualização vai conduzir o aluno a outro tipo de expressão. Nesse caso, cada figura se obtém quatro unidades, acrescida do número da posição da figura menos 1, vezes três. Por exemplo:

$$F1 = 4\,(1 - 1)\,x\,3$$
$$F2 = 4\,(2 - 1)\,x\,3$$
$$\ldots$$
$$F20 = 4\,(20 - 1)\,x\,3$$

Dessa forma, fica mais fácil verificar o número de palitos da vigésima posição e consequentemente de qualquer termo solicitado, podendo o aluno já descrever numa expressão algébrica, $Fn = 4\,(n - 1)\,x\,3$, como afirmam Vale *et al* (2011), "A representação simbólica de um termo numa posição qualquer pode aparecer intuitivamente quando pretendemos descrever simbolicamente a lei de formação (fórmula ou equação explícita)" (p. 28).

No terceiro e último modo, os autores pesquisados podem "Ver" uma sequência de quadrados, em que cada quadrado é formada por quatro palitos, não esquecendo que há lados comuns nos quadrados, sendo necessário retirar esses palitos, como no exemplo:

$$F1 = 1\,x\,4$$
$$F2 = 2\,x\,4 - 1$$

$$F3 = 3 \, x \, 4 - 2$$
$$\dots$$
$$F20 = 20 \, x \, 4 - 19$$

Percebe-se que esta expressão também conduz o observador a uma generalização distante e algébrica, podendo também expressar a quantidade de palitos de uma posição qualquer do seguinte modo, $Fn = n \, x \, 4 - 19$. Sendo assim, os autores destaca que é importante que os pesquisados consigam perceber que as várias maneiras de visualizações conduzirão a expressões diferentes, até mesmo porque traduzem modos distintos de "Ver", contudo essas expressões são equivalentes. Vale *et al* (2011), indicam que: "Para se conseguir flexibilidade de pensamento resultante de diferentes formas de ver que mais convém aos nossos propósitos, é necessário propor aos estudantes tarefas nas quais eles possam desenvolver, entre outras, a capacidade de rápida contar". (p.29).

Sendo assim, depois de verificar que a visualização de padrões, a descrição e a generalização têm sido avaliadas, sendo estas, importantes para a passagem da aritmética para a álgebra. E que esse tipo de atividade desenvolve no pesquisado a capacidade de generalizar, abstrair, além de compreender e perceber a noção de variáveis. Baqueiro (2016) baseada em Devlin, Mason, Ferrini-Mundy, Lappan e Philips, compreende a matemática como sendo a ciência dos padrões e a generalização como uma das essências do pensamento matemático, um modo produtivo de desenvolver o Pensamento Algébrico e também o reconhecimento, apreciação, expressão e manipulação da generalidade. (BAQUEIRO, 2016, p.25).

Dessa maneira, com base nos estudos de Fiorentini *et al* (1993), sobre a relação que existe entre linguagem e Pensamento Algébrico; de Fiorentini, *et al* (2005) acerca dos caracterizadores do Pensamento Algébrico que podem ser analisados em atividades exploratório investigativas e de Vale *et al* (2011) que trata da importância das atividades com padrões matemáticos para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, foram realizados todos as opções metodológicas, que serão apresentadas no próximo capítulo juntamente com a caracterização dos lócus da pesquisa.

CAPÍTULO III

3 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos as opções metodológicas adotadas na elaboração desse trabalho, caracterizando-as e descrevendo – as. Além disso, faremos uma exposição da organização dos procedimentos metodológicos, qual a caracterização dos lócus, o sujeito da pesquisa e do instrumento utilizado para coleta dos dados. Por fim, os passos seguidos pelo pesquisador para realização da referida pesquisa e as técnicas utilizadas para análise dos dados.

3.1 OPÇÕES METODOLÓGICAS

Gil (2010) afirma que o ser humano tem uma tendência natural a qualificar as coisas e/ou objetos de modo a possibilitar uma melhor organização dos fatos, facilitando assim o seu entendimento e que dessa forma, classificar as pesquisas torna-se uma atividade importante. O Autor refere ainda que cada pesquisa é naturalmente diferente uma da outra e que podem ser classificadas de diferentes maneiras, de acordo com sua natureza, etc.

Neste sentido, esta pesquisa pode ser classificada, quanto a sua natureza, como qualitativa, pois não objetivamos avaliar apenas o resultado final, mas todo o andamento da pesquisa. Para Gerhardt e Silveira (2009, p. 32), "a pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais".

Quanto ao objetivo desta pesquisa que é de *analisar os caracterizadores do Pensamento Algébrico revelados por professores de Matemática, por meio de atividades envolvendo padrões*, classificamos como exploratória, pois de acordo com Gil (2010), este tipo de trabalho tem a finalidade de proporcionar uma maior familiaridade com o tema proposto, de modo a torná-la mais exposta na comunidade científica. Para Fiorentini *et al* e Lorenzato (2009), as pesquisas exploratórias podem abranger levantamento bibliográfico, e funcionam como uma sondagem na busca de determinadas ideias de investigações viáveis ou não, podendo envolver um levantamento bibliográfico por meio de realização de entrevistas, aplicação de questionários ou testes, ou ainda estudo de casos. Optamos por utilizar um questionário que será descrito na sessão 3. 2. 2.

Ainda de acordo com o objetivo, essa pesquisa é descritiva, pois visa descrever ou caracterizar com detalhes uma situação (Fiorentini e Lorenzato, 2009 p. 70). Segundo Lakatos

(2010) uma pesquisa é exploratório-descritiva, quando: estudos exploratório-descritivos são estudos exploratórios que têm por objetivo descrever completamente determinado fenômeno, como por exemplo, o estudo de um caso para o qual são realizadas análises empíricas e teóricas. Podem ser encontradas tanto descrições quantitativas e/ou qualitativas quanto acumulação de informações detalhadas, como as obtidas por intermédio da observação participante. Dá-se precedência ao caráter representativo sistemático e, em consequência, os procedimentos de amostragem são flexíveis. (LAKATOS, 2010 p. 171).

Diante do exposto foi feito um levantamento bibliográfico com pesquisas que se reportavam aos aspectos do Pensamento Algébrico e através das leituras surgiu o seguinte questionamento: *Quais os caracterizadores do Pensamento Algébrico são revelados por professores de Matemática ao resolverem atividades envolvendo padrões?*

Para responder a essa pergunta utilizamos um questionário, que de acordo com Lakatos (2010 p. 184), "é um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador". Para essa pesquisa usamos um questionário do tipo misto, pois, combina parte com perguntas fechadas e parte com perguntas abertas. Fiorentini *et al* e Lorenzato (2010, p.116).

Para aplicar o questionário tivemos que ir diretamente à escola, onde coletamos os dados necessários. Esse tipo de procedimento é defendido por Lorenzato (2009) como um estudo de campo.

Após delinear as escolhas metodológicas, apresentaremos na sessão seguinte, os procedimentos adotados na elaboração e aplicação dos questionários.

3.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta sessão, apresentaremos como foi estruturado e organizado o questionário aplicado, a caracterização do lócus e sujeito da pesquisa, instrumento utilizado na pesquisa: questionário e a técnica para análises dos dados.

3.2.1 Caracterizações do lócus e sujeito da pesquisa

A pesquisa foi realizada com professores de matemática em dois municípios (que denominaremos de A e B), próximos a cidade de Alagoinhas, localizada na região nordeste do Estado da Bahia a 92 km da capital. Sendo que, no município A, a escola é de dependência Municipal e no B, de dependência Estadual.

O questionário, devido a sua extensão, foi pensado para ser aplicado da seguinte forma: primeiro entregaríamos aos professores o termo de consentimento e as partes I, II e III. Quando acabassem de responder recolheríamos e daríamos as partes IV (que contém as atividades envolvendo padrões matemáticos) e V.

No dia 18 de maio de 2016 (quarta-feira), fui até a Escola Municipal coletar os dados para a pesquisa. Apresentei-me para as quatro coordenadoras, justificando a minha presença na escola e informando que gostaria de aplicar um questionário aos professores de matemática.

O município A, conta com 9 (nove) professores de matemática, atuantes no ensino fundamental II, no entanto as coordenadoras informaram que neste dia estavam presentes apenas seis deles. Os demais não se encontravam na escola no momento por motivos diversos: uma professora estava de licença prêmio, outro, não era o dia de trabalho na escola e o último por lecionar apenas no noturno. Não conseguimos aplicar de imediato, pois um professor estava participando do AC (Atividade Complementar) e os demais em sala de aula.

Após aguardar, reportei-me inicialmente ao professor que estava no AC, convidando-lhe a participar do trabalho e explicando a sua importância nesse processo. Ele disse que estava muito ocupado e que não poderia responder, como continuei insistindo, o mesmo pediu-me para ver o questionário.

Assim, como havíamos pensado inicialmente, primeiro entreguei o termo de consentimento[2] e as partes I, II e III. Antes de começar a responder o docente olhou todo o material entregue e fez algumas perguntas a fim de esclarecer as dúvidas. Após ter respondido essa primeira etapa, entreguei-lhe o restante do questionário. O professor deu risada e disse que eu era esperta. Depois de algum tempo, disse que levaria para responder em casa com calma e que devolveria na semana seguinte, pois naquele momento não teria condições de responder o restante. Diante disso, entreguei todo o questionário para o professor levar para casa e fiquei aguardando a aula acabar para aplicar com os demais professores que estavam na escola.

Na hora do intervalo, dirigi-me para a sala dos professores e convidei os outros cinco docentes a participar da pesquisa. Após explicação dos objetivos e da importância da contribuição deles, percebi certa resistência. Um dos docentes recusou-se logo a participar justificando que estava na hora do descanso e que não levaria para casa pois não tinha tempo e nem paciência para responder as questões abertas, outro professor deu-me as costas e deixou-

[2] Contendo a garantia do seu anonimato e que suas respostas tinham a finalidade exclusiva de colaborar com o objetivo da pesquisa.

me falando sozinha, alegando depois, não ter percebido que estava falando com ele, mas que levaria o questionário para casa e entregaria depois.

Os três docentes restantes, disseram que levariam para responder em casa, pois o questionário era muito grande e não daria tempo de responder naquele momento porque tinham que retornar para sala, mas que entregariam na semana seguinte.

No dia seguinte (19 de maio), retornei à escola para aplicar o questionário com os dois docentes que não estavam presentes na primeira visita, apresentei-me a eles, em seguida expliquei os objetivos da pesquisa e a importância da contribuição e participação dos mesmos. Diante da experiência com os cinco professores da primeira visita, decidi não mais aplicar todo o questionário no mesmo dia, mas sim entregá-lo para que os professores respondessem em casa e me devolvessem na semana seguinte.

Uma semana depois, no dia 25/05, retornei à escola como havia combinado com os cinco professores da primeira visita, mais apenas três me entregaram o questionário. Os demais alegaram não ter tido tempo de responder e que responderiam para entregar depois.

Fui em um outro dia receber dos docentes da segunda visita, os outros dois questionários restantes. Os mesmos alegaram, ter respondido, mas que tinham esquecido de trazer para a escola. Retornei mais duas vezes na expectativa que trouxessem, mas não obtive sucesso.

Assim sendo, no município A, conseguimos fazer a pesquisa com apenas três docentes. Após verificarmos superficialmente as respostas dadas pelos mesmos, ou seja, sem a pretensão de uma análise mais detalhada, imaginamos não ter coletado dados suficientes para atingir o nosso objetivo, o que nos levou a querer coletar mais dados. Neste sentido, por questão de conveniência, decidimos aplicar o questionário a professores de matemática de uma escola estadual situada no município B e que possui sete professores de matemática.

Levando em consideração as experiências vividas na escola municipal, decidimos não dividir o questionário em duas partes, mais sim entregá-lo completo para que os professores pudessem decidir por responder no momento ou levá-lo para casa.

Sendo assim, fui à escola no dia 07 de julho de 2016 (quinta-feira), no horário que é destinado ao AC de exatas e os professores estavam elaborando as provas e organizando notas para finalizar a unidade, por este motivo, apenas uma professora se disponibilizou a colaborar com a pesquisa, respondeu e entregou-me, comentou apenas que o questionário era muito extenso e cansativo.

No dia 18 de julho 2016 (segunda-feira), entreguei a outra professora, ao devolver também comentou que era cansativo de responder. No dia 21 de julho de 2016 (quinta-feira), que é destinado ao AC, consegui aplicar com mais dois professores que responderam e entregaram e que também comentaram sobre o tamanho do questionário.

Não conseguimos fazer a pesquisa com dois professores. Um levou o questionário para responder em casa e não devolveu e o outro trabalha apenas à noite, não sendo possível entrar em contato com o mesmo, portanto, cinco, dos sete professores, participaram dessa pesquisa. E assim, encerramos a fase da coleta de dados.

Logo, está pesquisa conta com um total de sete questionários respondido que chamaremos de protocolos. Para análise dos dados, denominaremos de protocolos M_1, M_2 e M_3 os questionários respondidos pelos professores da Escola Municipal e E_1, E_2, E_3 e E_4 os questionários respondidos pelos professores da Escola Estadual.

A seguir apresentaremos o instrumento de pesquisa utilizado e como ficaram estruturadas as cinco partes do questionário com seus respectivos objetivos.

3. 2. 2 Instrumentos utilizado na pesquisa: questionário

Para elaboração do questionário desse trabalho, tomamos como referência os instrumentos de coleta de dados que foram elaborados e aplicados pelas pesquisadoras, Carvalho (2016), Oliveira (2016) e Santos (2016). Todas integrantes do grupo de pesquisa GPEMA, que tinham como objetivo comum analisar os caracterizadores do Pensamento Algébrico, mas com sujeitos de pesquisas distintos, qual seja, alunos do ensino fundamental I, II e superior, respectivamente.

Após a análise dos dados, as pesquisadoras perceberam que os sujeitos de pesquisa não apresentaram os seguintes caracterizadores: *Produzir mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produzir vários significados para uma mesma expressão numérica; Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; Transformar uma expressão numérica em outra mais simples,* chegando à conclusão que as perguntas existentes no questionário não conduziram os pesquisados a apresentarem tais caracterizadores Com isso, buscamos elaborar um questionário que nos levasse a alcançar todos os nove aspectos do Pensamento Algébrico apresentados por Fiorentini *et al* (1993) como veremos a seguir.

PARTE I

A primeira parte do questionário contém perguntas do tipo: quais as séries/ anos que leciona e/ou lecionaram? Há quanto tempo ensina? Conforme pode ser visto no quadro que segue.

Quadro 2: Parte I do questionário apresentado aos professores no dia da pesquisa.

1 – Qual a sua Formação Acadêmica?
( ) Licenciatura plena em Matemática. ( ) Magistério ( ) Outra. Qual? _____________.

2 – Qual (is) o(s) ano(s)/série(s) que leciona atualmente?
( ) 6º ( ) 7º ( ) 8º ( ) 9º ( )1ª EM ( ) 2ª EM ( ) 3ª EM

3 – Você já lecionou outro (os) ano(s) /série(s)? Qual (is)?
( ) 6º ( ) 7º ( ) 8º ( ) 9º ( )1ª EM ( ) 2ª EM ( ) 3ª EM

4 – A quanto tempo leciona Matemática?
____

Fonte: Dados da pesquisa.

Esta parte do questionário tem como objetivo identificar o perfil profissional de cada professor, bem como sua formação acadêmica.

PARTE II

Na segunda parte do questionário apresentamos um problema que traz duas soluções corretas, sendo que a solução 1 foi resolvida utilizando um Pensamento Algébrico e a solução 2 um pensamento aritmético. Assim, o professor irá marcar a opção a qual mais se assemelha a sua opinião, justificando sua escolha, como veremos no quadro seguinte.

Quadro 3: Parte II do questionário apresentado aos professores no dia da pesquisa.

A professora Grace aplicou em sua turma o problema abaixo:
- *Pensei em um número, multipliquei por 3, somei 25 e obtive 61. Que número pensei?*
Ao verificar as respostas dadas pelos alunos, a professora percebeu duas soluções diferentes:

Solução 1

$$n\,.3 + 25 = 61$$
$$3\,n = 61 - 25$$
$$3\,n = 36$$
$$n = \frac{36}{3}$$
$$n = 12$$
$resp\colon o\ número\ pensado\ foi\ 12.$

Solução 2

$$61 - 25 = 36$$
$$36 : 3 = 12$$
$resp\colon o\ número\ pensado\ foi\ 12.$

Marque uma das alternativas de acordo com a sua opinião:

1) Você responderia usando qual solução: ( ) 1 ( ) 2 ( ) ambas soluções ( ) OUTRA. Qual?

2) Você considera a solução 2 uma *resolução algébrica*? ( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei
Justifique: ____

Fonte: Adaptado de Nogueira (2008, p.65).

Fiorentini *et al* (2005, p. 04) esclarecem que “[...] Tradicionalmente o ensino da álgebra se sustenta na crença de que o Pensamento Algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal ou através da manipulação da linguagem simbólica da álgebra [...]. ”

Neste sentido, esta segunda parte do questionário objetiva verificar qual a concepção algébrica dos professores de matemática ao observarem resoluções de questões envolvendo cálculos algébricos e/ou aritméticos.

PARTE III

A terceira parte tem como objetivo conhecer se os pesquisados já ouviram falar de padrões matemáticos alguma vez durante a sua trajetória enquanto discentes e/ou docentes.

Quadro 4: Parte III do questionário apresentado aos professores no dia da pesquisa.

1 - Você já ouviu falar em Padrões Matemáticos?
( ) Sim ( ) Não

2 – Caso a resposta da questão anterior tenha sido “sim”, explique o que você entende por Padrões Matemáticos.
____
____

3 – Enquanto discente você já estudou por meio de padrões matemáticos alguma vez?
( ) Não ( ) Sim. Onde?
( ) Ensino Fundamental I. Ano/Série __________.
( ) Ensino Fundamental II. Ano/Série __________.
( ) Ensino Médio. Ano/Série __________.
( ) Ensino Superior. Semestre/Componente Curricular __________.

De que forma?
____
____

4 - Enquanto docente você já trabalhou utilizando padrões matemáticos alguma vez?
( ) Não ( ) Sim. Onde?
( ) Ensino Fundamental I. Ano/Série __________.
( ) Ensino Fundamental II. Ano/Série __________.
( ) Ensino Médio. Ano/Série __________.
( ) Ensino Superior. Semestre/Componente Curricular __________.

De que forma?
____
____

Fonte: Dados da pesquisa.

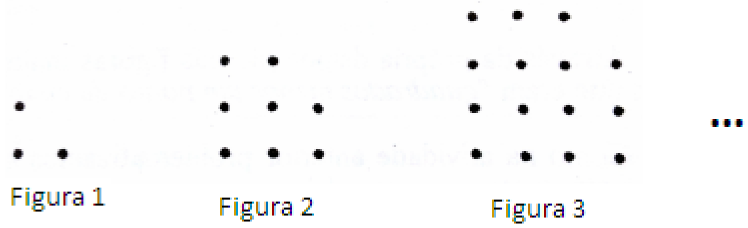
Esta parte do questionário também possibilita investigar se tal abordagem é utilizada pelos mesmos em sua prática de ensino.

PARTE IV

A quarta parte desta atividade tem como objetivo analisar os caracterizadores do Pensamento Algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), por meio de uma atividade envolvendo padrões. Buscaremos também identificar os tipos de generalização (próxima, distante ou algébrica) revelados nas justificativas dadas pelos professores pesquisados. A seguir, trazemos uma exposição de cada item e dos seus respectivos objetivos.

Item (1)

Observe a sequência abaixo:



Qual a próxima figura da sequência? E a seguinte? Desenhe.

No item (1) desta questão esperamos que os professores *consigam estabelecer relações/comparações entre os padrões geométricos*.Com isso, os docentes poderão *perceber e expressar tais regularidades*, por meio do desenho, podendo assim desenvolver *generalizações próximas*.

Item (2)

Explique como você pensou para responder a questão 1.

No item (2), objetivamos que os professores pesquisados, possam justificar como pensaram para responder o item (1), ou seja, que descrevam por meio de uma linguagem corrente como percebeu o padrão na construção da sequência. Pois de acordo com Fiorentini *et al* (1993), quando se faz uso da linguagem corrente, não usamos símbolos nem abreviações para expressar o Pensamento Algébrico.

Ao *expressarem as regularidades presentes na sequência dada*, poderemos detectar o tipo de padrão observado, por exemplo, se o padrão é do tipo *recursivo*, que segundo Vale *et al* (2011), é aquele padrão que depende sempre do desenho da figura anterior para obter a seguinte. Desta forma, o pensamento recursivo leva à resolução da questão passo a passo, desenhando ou contando, que de acordo com (Stacey, 1989 apud Baqueiro 2016 p. 136), é denominado de *generalização próxima*.

O esperado por nós é que os professores consigam observar um padrão que o levem à generalização distante, que ainda segundo (Stacey, 1989 apud Baqueiro 2016 p. 136) é aquela que vai além do limite prático razoável da abordagem passo a passo.

Item (3)

Ainda observando a sequência, quantos pontos têm as figuras 1, 2, 3, 4, e 5?

Nesse item traçamos como objetivo, chamar a atenção do professor para a relação existente entre a *quantidade dos pontos* e o *número da posição das figuras* e assim, poderão *expressar* tais *regularidades ou invariâncias* por meio de *estruturas aritméticas da situação-problema dada*. Além disso, levar ao desenvolvimento de uma *linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente*.

Item (4)

Este item foi dividido em quatro subitens, que seguem:

Subitem 4 (a)

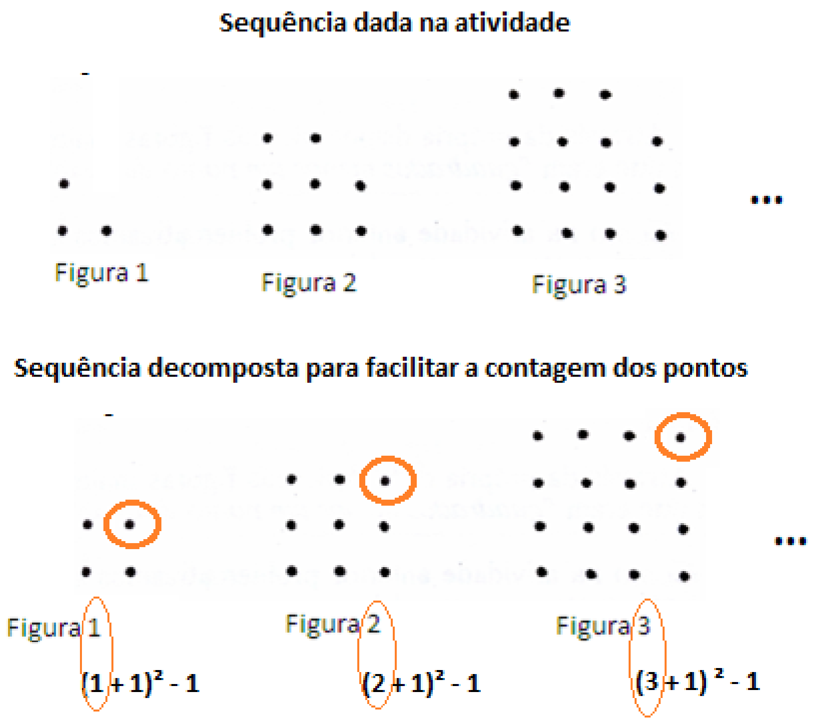
a) Quantos pontos têm a figura 7 da sequência? E a figura 8? E a figura 75?

O objetivo deste item é que o professor descubra uma "regra" para determinar a quantidade de pontos da figura 75 (Figura 16), abandonando (caso tenham adotado) o padrão recursivo. Isto se dará por meio da observação da relação existente entre a quantidade dos pontos e o número da posição das figuras. Pois, segundo Vale *et al* (2011):

> Constataremos que ver de diferentes modos pode, por exemplo, permitir que estudantes de níveis elementares resolvam problemas que envolvem generalizações que, tradicionalmente, só se poderiam resolver com uma matemática mais desenvolvida. Ver, envolve nessa perspectiva, decompor a figura inicial em partes que tenham significado para o aluno, permitindo-lhe mais facilmente identificar uma relação entre elementos que compõe a figura e a respectiva posição na sequência da qual faz parte. (p. 26).

Figura 6: Interpretação do subitem (a), relação entre a posição da figura e quantidade de pontos.

Apresentamos a seguir um exemplo que ilustra uma possível relação entre as grandezas: número da posição da figura e o número de pontos.



Fonte: autoria própria.

Neste caso, *o número da posição da figura + 1*, significa o número de pontos das linhas e das colunas, que na figura “decomposta” são iguais. Daí, para calcular o número de pontos, fazemos a operação (*número da posição da figura + 1*)^2. Só que na última coluna de cada figura da sequência dada, falta o primeiro ponto. Assim sendo, para calcular o número total de pontos das figuras solicitadas teríamos que realizar a operação (*número da posição da figura + 1*)^2 - 1. Deste modo, para calcular o número de pontos da figura 75, bastaria fazer $(75 + 1)^2 - 1$, segundo Lee & Freiman (2006) (*apud* Vale *et al*, 2011 p. 26), “Ver” um padrão é o primeiro passo necessário na exploração de padrões.

Neste subitem esperamos que os professores apresentem os seguintes caracterizadores: *estabeleça relações/comparações entre padrões geométricos, que possam desenvolver algum tipo de generalização*[3]*, perceba e tente expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema e desenvolvam uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.*

---

[3] Que neste caso esperamos seja a *distante*.

Subitem 4 (b)

Como você pensou para responder a questão (a)?

____

____

Este subitem objetiva analisar como os discentes pensaram ao responder o subitem (a), verificando se os mesmos conseguiram *perceber a regularidade e desenvolveram algum tipo de generalização.*

Subitem 4 (c)

Você consegue pensar em outra maneira para calcular o número de pontos?

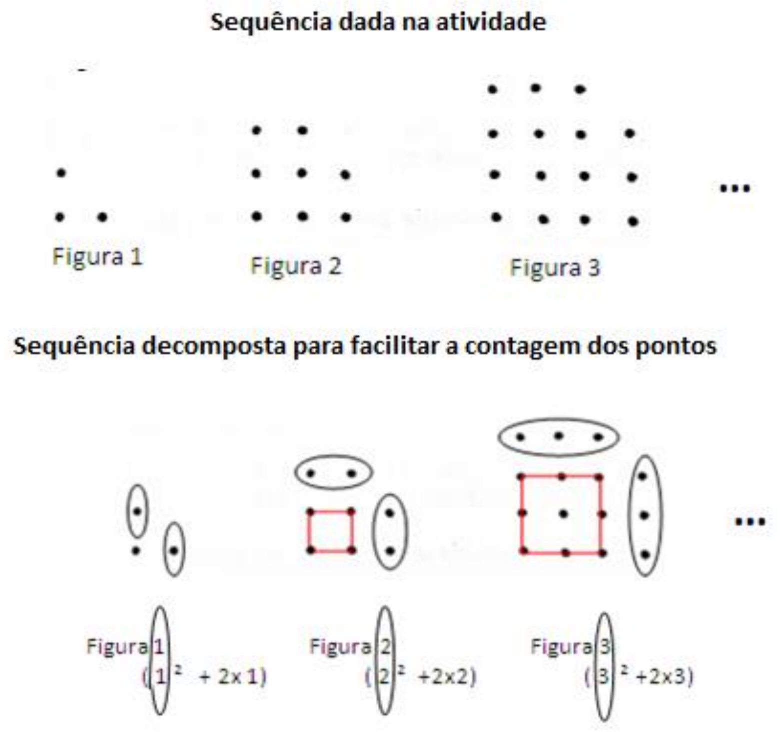
____

____

Esse subitem busca induzir o pesquisador a pensar em outras maneiras para calcular a quantidade de pontos da figura. Uma maneira prevista por nós, apresentada na figura seguinte.

Figura 7: Interpretação do subitem (c) por meio da contagem dos pontos

2º Modo de contar



Fonte: autoria própria.

Este modo de "ver" a figura para contar os pontos tem a seguinte conotação: em cada figura temos uma quantidade de pontos, que é um quadrado perfeito e está relacionado ao número da posição da figura, 1^2, 2^2, 3^2, ... Além disso, sempre sobra na 1ª linha e na última coluna um número de pontos igual ao da posição da figura, levando ao produto: 2 x 1, 2 x 2, 2 x 3, ... Assim sendo, o número total de bolinhas seria dado pela expressão: (*número da posição da figura)² + 2 x o número da posição da figura*. Deste modo, para calcular o número de pontos da figura 75, bastaria fazer $(75)^2 + 2x75$.

Neste sentido, esperamos que os docentes apresentem um dos modelos previstos por nós, ou até mesmo um outro modelo. Afinal, de acordo com Modanez (2003), quando somos apresentados a atividades que proporcionem o levantamento de conjecturas e a noção de que podemos ter mais de uma forma de resolver um problema podemos desenvolver uma autonomia ao longo da resolução dessa atividade.

Os caracterizadores associados a este item seriam: *perceber e produzir mais de um modelo para uma mesma situação-problema e tentar expressar tais estruturas aritméticas.*

Subitem 4 (d)

Existe alguma relação entre as respostas das alternativas (b) e (c)? Se existir, explique qual (is).

O objetivo deste item é que o professor descubra que as expressões obtidas nos modelos dos itens 4(b) e 4(c), são *equivalentes*. Por exemplo, utilizando as expressões previstas por nós (figura tal e tal), temos que $(1 + 1)^2 - 1$ é equivalente à expressão $1^2 + 2.1$, pois:

Quadro 5: Interpretação do subitem (d), equivalência entre os modelos.

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} + \mathbf{1})^{\mathbf{2}} - \mathbf{1} &= (1^2 + 2\,.\,1\,.\,1 + 1^2) - 1 \\ &= 1^2 + 2\,.\,1 + 1 - 1 \\ &= 1^2 + 2\,.\,1 + 0 \\ &= \mathbf{1^2 + 2\,.\,1} \end{aligned}$$

Fonte: autoria própria.

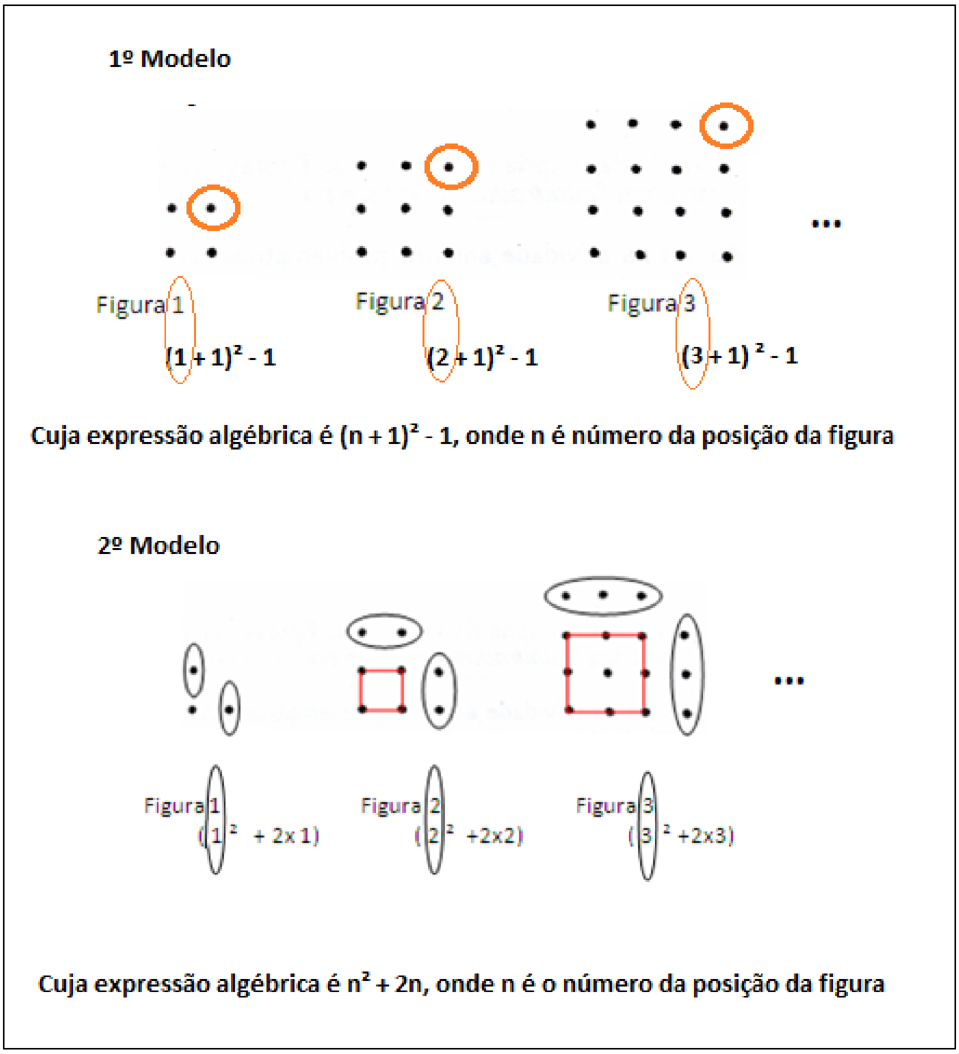
Nesse subitem esperamos que o docente apresente o seguinte caracterizador: *produzir vários significados para uma mesma expressão numérica, transformando-a em outra mais simples.*

Item (5)

Quantos pontos têm uma figura numa posição qualquer? ____ ____

Neste item objetivamos que o professor consiga expressar algebricamente a “regra” apresentada no subitem (b) anteriormente, *desenvolvendo algum tipo de generalização algébrica*. Pode acontecer nesse subitem que o sujeito da pesquisa *consiga produzir vários significados para uma mesma expressão numérica*. Como mostraremos na figura que segue:

Figura 8: Interpretação do item (5) por meio da expressão algébrica.



Fonte: autoria própria.

PARTE V

A quinta e última parte deste questionário teve como objetivo conhecer a opinião dos pesquisados em relação à atividade aplicada. Como pode ser visto no quadro seguinte.

Quadro 6: Parte V do questionário apresentado aos professores no dia da pesquisa.

PARTE V: Dê a sua opinião sobre a atividade que acabou de responder.
O que você achou desta atividade?
( ) Fácil ( ) Tive dificuldades( ) Difícil
Justifique:
____
____

Você já fez alguma atividade deste tipo antes?
( ) Não ( ) Sim. Quando? ______________________

Você aplicaria essa atividade com seus alunos?
( ) Sim ( ) Não.

Justifique.
____
____
Você considera que este tipo de atividade pode ser aplicado para alunos do 5º e 6º ano?
( ) Sim ( ) Não.

Justifique.
____
____

Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação à questão 4, desta parte, concordamos com Fiorentini *et al* (2005), quando refere que:

> A iniciação ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico, portanto, pode ocorrer desde os primeiros anos de escolarização. Segundo o educador matemático Ken Milton (1989) "aquilo que ensinamos em aritmética e a forma como a ensinamos têm fortes implicações para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico". (FIORENTINI *et al*, 2005, p. 5).

3.2.3 Técnicas para análise dos dados: Emparelhamento com o quadro teórico

Para fazermos a análise dos itens da parte IV utilizaremos uma técnica chamada de *emparelhamento ou associação*, analisaremos os dados obtidos no questionário a partir de um teórico já prévio, associando ou emparelhando o quadro teórico e o material obtido, verificando as correspondências existentes entre eles Lorenzato (2010). Faremos emparelhamento ou associação entre resoluções dos professores e o quadro dos caracterizadores de Fiorentini *et al* (2005), que sistematizamos no quadro seguinte:

Quadro 7: Aspectos do Pensamento Algébrico, segundo Fiorentini *et al* (2005), que podem ser encontrados em cada item da parte III do questionário.

CARACTERIZADORES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO		**PARTE IV**							
		ITENS							
					4				
		1	**2**	**3**	**a**	**b**	**c**	**d**	**5**
C_1	Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos	x		x	x				
C_2	Perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação problema				x	x			
C_3	Produzir mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica;						x	x	x
C_4	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas							x	
C_5	Transformar uma expressão numérica em outra mais simples							x	
C_6	Desenvolver algum tipo de processo de generalização		x	x	x	x	x		x
C_7	Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias	x	x	x		x			
C_8	Desenvolver uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente			x	x				

Fonte: Autoria Própria

Diante da análise do quadro, percebemos que em alguns itens os professores podem desenvolver o caracterizador C6, apresentando assim algum tipo de generalização, ou seja, generalização próxima e distante segundo Stacey e a algébrica de acordo Radford. Diante disso, criamos o quadro a seguir para que possamos fazer um emparelhamento com as justificativas dadas pelos professores aos itens destacados acima.

Quadro 8: Tipos de generalizações esperados que os professores apresentem.

TIPOS DE GENERALIZAÇÃO	**PARTE IV – ITENS**							
	1	**2**	**3**	**4 a**	**4 b**	**4 c**	**4 d**	**5**
Generalização próxima	x			x		x		
Generalização distante		x	x	x	x	x		
Generalização algébrica								x

Fonte: Autoria Própria

O quadro mostra que no item 1 o docente poderá realizar uma generalização próxima. Nos itens 4 (a) e 4 (b) os mesmos podem apresentar uma generalização distante e no item 5 uma generalização algébrica.

CAPÍTULO IV
4 ANALISE DE DADOS

Neste capítulo, apresentaremos as análises dos dados extraídos das resoluções dos questionários aplicados com professores de matemática, aqui denominados de protocolos M_1, M_2, M_3, E_1, E_2, E_3 e E_4. A análise foi dividida em cinco etapas, sendo na quarta parte que foi utilizado a técnica do emparelhamento, no qual analisamos os caracterizadores do Pensamento Algébrico revelados pelos pesquisados, por meio de atividades envolvendo padrões, respondendo assim, a nossa questão de pesquisa.

PARTE I – Perfil profissional dos professores

Ao analisar a primeira parte do questionário que teve como objetivo identificar o perfil profissional dos pesquisados, foi possível perceber que apenas o professor do protocolo M_1, é graduado em pedagogia, os demais são licenciados em Matemática, sendo que o docente do protocolo M_2 indicou ter pós-graduação em Ensino da Matemática. Como presente no quadro seguinte.

Quadro 9: Respostas das questões 2, 3 e 4 da parte I do questionário aplicado.

PROTOCOLOS	**RESPOSTAS**		
	Tempo que leciona	Anos/séries que leciona	Anos/séries que já lecionou
M_1	5	Ciclo IV e Ciclo V	7º
M_2	9	6º, 7º e 8º	1º e 3º
M_3	13	9º	6º, 7º, 8º e 1º (EM)
E_1	4	7º e 8º	9º
E_2	14	9º e 1º (EM)	6º, 7º e 1º, 2º, 3º (EM)
E_3	13	1º, 2º, 3º (EM)	6º, 7º e 9º
E_4	Não informou	6º e 7º	1º, 2º e 3º (EM)

Fonte: Dados da Pesquisa.

Tais respostas mostram que a maioria dos pesquisados possuem experiência tanto no Ensino Fundamental II, quanto no Ensino Médio.

PARTE II – Pensamento Algébrico x Linguagem Algébrica

A segunda parte do questionário objetivou verificar qual a concepção algébrica dos professores de matemática ao observarem resoluções de questões envolvendo cálculos algébricos e/ou aritméticos. Apresentamos aos professores uma situação problema com duas soluções corretas distintas. A primeira solução possui uma resolução envolvendo incógnitas e na segunda apenas cálculos numéricos. O quadro seguinte mostra que todos os pesquisados responderiam utilizando a primeira solução.

Quadro 10: Resposta dos professores da parte II do questionário aplicado

QUESTÃO 1: Você responderia usando qual solução?				
PROFESSORES	**RESPOSTAS**			
	Solução 1	Solução 2	Ambas soluções	Outra. Qual?
Escola Municipal	M_1, M_2 e M_3	-	-	-
Escola Estadual	E_1, E_2, E_3 e E_4	-	-	-

Fonte: Dados da Pesquisa

Com base no nosso referencial teórico, já esperávamos tal resposta, uma vez que Fiorentini *et al* (1993) afirmam que o ensino da matemática vem sendo desenvolvido ao longo dos anos valorizando a linguagem algébrica em detrimento do Pensamento Algébrico que envolve também o pensamento aritmético. Tal conclusão é reforçada na segunda questão, conforme quadro seguinte.

Quadro 11: Resposta dos professores da parte II do questionário aplicado

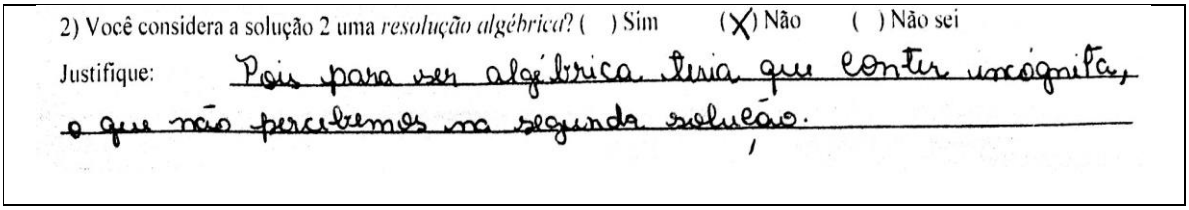
QUESTÃO 2: Você considera a solução 2 uma resolução algébrica?			
PROFESSORES	**RESPOSTAS**		
	Sim	Não	Não Sei
Escola Municipal	-	M_1, M_2 e M_3	-
Escola Estadual	E_2	E_1, E_3 e E_4	-

Fonte: Autoria própria

Estes dados reforçam a ideia de Fiorentini *et al* (2005, p. 4), ao afirmarem que tradicionalmente o ensino da álgebra se sustenta na crença de que o Pensamento Algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal ou através da manipulação da linguagem simbólica da álgebra.

Aproximadamente 71,4% dos docentes justificaram que para a resolução ser algébrica era necessária a presença da incógnita e/ou variável, conforme pode ser visto na imagem seguinte:

Figura 9: Imagem da resposta do protocolo do professor E_4

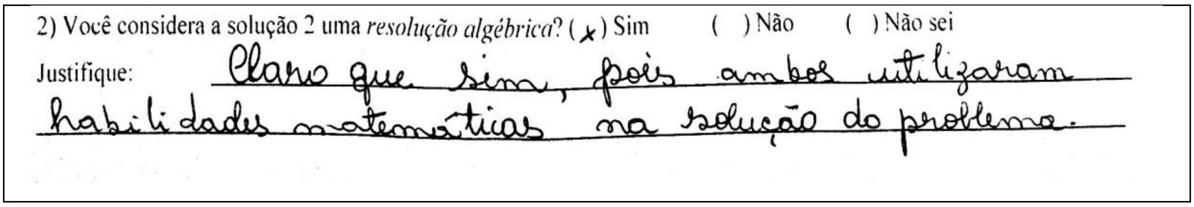

2) Você considera a solução 2 uma *resolução algébrica*? ( ) Sim (X) Não ( ) Não sei

Justifique: Pois para ser algébrica teria que conter incógnita, o que não percebemos na segunda solução.

Fonte: Dados da pesquisa

Apenas o professor do protocolo E_2 considera a solução 2 como uma resolução algébrica. A justificativa do mesmo nos fez conjecturar que a percepção desse docente não está atrelada apenas à linguagem simbólica formal, reconhecendo que envolve outras habilidades, embora não as tenha especificado, como mostra a imagem a seguir.

Figura 10: Imagem da resposta do protocolo do professor E_2


2) Você considera a solução 2 uma *resolução algébrica*? (x) Sim ( ) Não ( ) Não sei

Justifique: Claro que sim, pois ambos utilizaram habilidades matemáticas na solução do problema.

Fonte: Dados da pesquisa

Tais resultados nos leva a inferir que devemos investir na formação continuada desses professores, pois a maioria ainda não consegue perceber que o Pensamento Algébrico vai além da linguagem algébrica simbólica, uma vez que Fiorentini *et al* (1993), afirmam não existir uma única maneira de expressar o Pensamento Algébrico, pois, o mesmo pode se manifestar por meio de uma linguagem aritmética, geométrica ou algébrica, estritamente simbólica.

PARTE III – Padrão Matemático

A análise da terceira parte do questionário buscou saber dos pesquisados se já ouviram falar de padrões matemáticos alguma vez durante a sua trajetória enquanto discentes e/ou docentes. Entre os sete professores pesquisados, apenas dois deles, M_2 e E_3, informaram não conhecer o termo padrões matemáticos, os demais responderam já ter ouvido falar do tema. Diante disso, para facilitar a análise, classificamos as respostas em dois grupos:

Grupo 1: Os professores que não conhecem o termo padrão matemático.

Grupo 2: Os professores que já ouviram falar em padrão matemático. O quadro seguinte ilustra essa divisão.

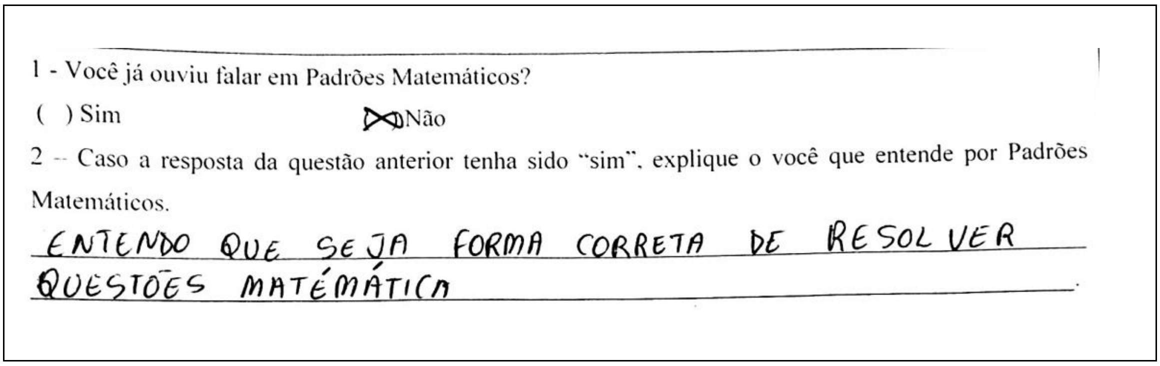
Quadro 12: Respostas da parte III dos pesquisados

Você já ouviu falar em Padrões Matemáticos?		
PROFESSORES	**GRUPO 1**	**GRUPO 2**
	RESPOSTAS	
	Não	Sim
Escola Municipal	M_2	M_1 e M_3
Escola Estadual	E_3	E_1, E_2 e E_4

Fonte: Autoria própria

No Grupo 1, o professor do protocolo E_3 não justificou, o M_2 mesmo afirmando não conhecer o termo, explicou o que entendia como padrão matemático, como pode ser visto a seguir.

Figura 11: Imagem da resposta do professor, protocolo M_2


1 - Você já ouviu falar em Padrões Matemáticos?

( ) Sim (X) Não

2 – Caso a resposta da questão anterior tenha sido "sim", explique o você que entende por Padrões Matemáticos.

ENTENDO QUE SEJA FORMA CORRETA DE RESOLVER QUESTÕES MATÉMÁTICA

Fonte: Dados da pesquisa

No grupo 2 aparecem três tipos de justificativas para o termo padrão matemático: relacionado ao cotidiano, como uma forma rigorosa de ensino e como regularidades. No 1º caso, temos os protocolos M_1 e M_3, como podem ser verificados a seguir:

Quadro 4: Imagens da resposta dos protocolos M_1 e M_3.

Professor do protocolo M_1
2 – Caso a resposta da questão anterior tenha sido "sim", explique o você que entende por Padrões Matemáticos. São exemplos da presença da matemática na vida cotidiano.
Professor do protocolo M_3
2 – Caso a resposta da questão anterior tenha sido "sim", explique o você que entende por Padrões Matemáticos. São exemplos da presença da matemática na vida das pessoas em várias situações cotidianas.

Fonte: Dados da pesquisa

O caso em que os professores entendem o padrão matemático como uma forma rigorosa de ensino, aparece nos protocolos E_2 e E_4, conforme figura seguinte:

Quadro14: Imagens da resposta do protocolo E_2 e E_4

Protocolo do professor E_2
2 – Caso a resposta da questão anterior tenha sido "sim", explique o você que entende por Padrões Matemáticos. Creio que durante, todo o momento, que a matemática me foi imposta. A maneira por exemplo de se resolver a equação separando letras dos números, represente um Padrão
Protocolo do professor E_4
2 – Caso a resposta da questão anterior tenha sido "sim", explique o você que entende por Padrões Matemáticos. Seria uma forma mais rigorosa de aprendizado.

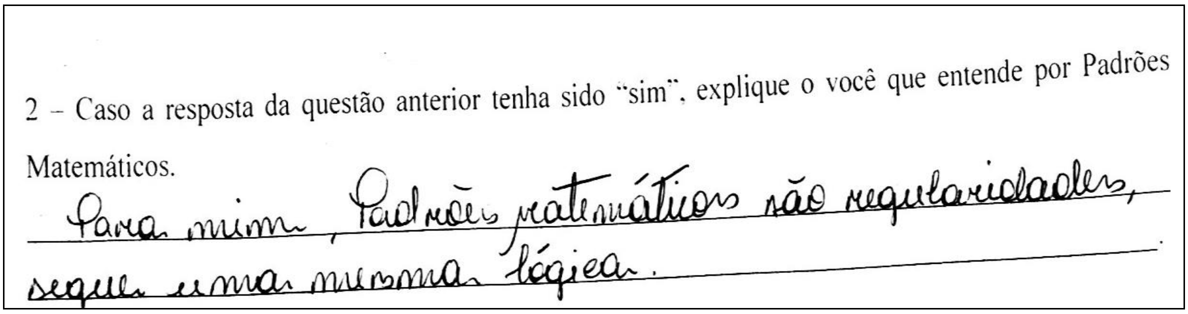
Fonte: Dados da pesquisa

Diante das respostas, percebemos que os docentes entendem o padrão matemático como um conjunto de regras a serem seguidas. Vale *et al* (2011) citando Devlin, refere que:

> [...] as pessoas concentram-se cada vez mais nos números, fórmulas, equações e métodos e perderam de vista o que aqueles números, fórmulas, e equações eram realmente e porque é que se desenvolveram aqueles métodos. Não conseguem entender que a Matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras arcaicas, mas sim a compreensão de padrões[4] – padrões da natureza, padrões da vida, padrões da beleza. (p. 9).

No terceiro e último caso, encontra-se o professor do protocolo E_1, no qual afirma que os padrões matemáticos são regularidades, conforme podemos ver na figura seguinte:

Figura 12: Imagem da resposta do protocolo E_1.


2 – Caso a resposta da questão anterior tenha sido "sim", explique o você que entende por Padrões Matemáticos.

Para mim, Padrões matemáticos são regularidades, segue uma mesma lógica.

Fonte: Dados da pesquisa

Tal justificativa se aproxima um pouco da noção dada por Vale *et al* (2011, p.9), em que "o termo padrão é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades".

No entanto, o professor segue afirmando que os padrões matemáticos seguem uma mesma lógica, deixando claro para nós que pensa exatamente como os professores do caso anterior, em que relaciona os padrões com manipulação de regras.

Concordamos com Devlin (2002), a matemática seja a Ciência dos padrões e com Vale *et al* (2011, p.9), quando afirma que "na matemática tentamos interpretar situações procurando padrões, ou recorremos ao termo através da regularidade, sequência, sucessões, lei de formação e generalização".

PARTE IV – Padrões Matemáticos x Caracterizadores do Pensamento Algébrico

[4] Grifo nosso.

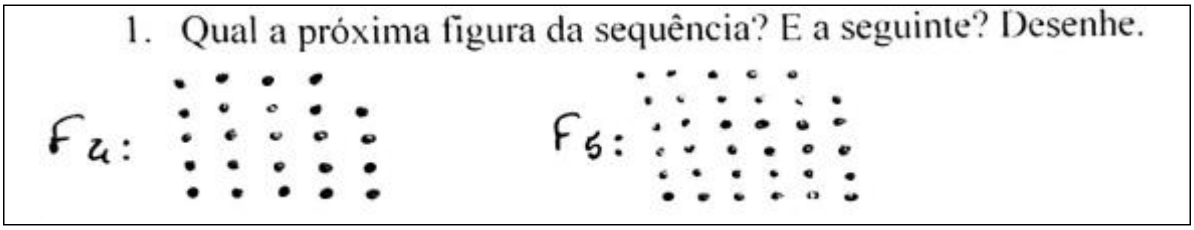
Esta parte IV analisou os caracterizadores do Pensamento Algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), por meio de uma atividade exploratório-investigativa envolvendo Padrões Matemáticos e os tipos de generalização revelados nas justificativas dadas pelos docentes.

Vale ressaltar que o professor do protocolo M_3, não respondeu esta parte do questionário, ficando nossas análises restritas a seis protocolos. A seguir, apresentaremos a análise dos dados item a item.

Análise do Item (1)

Ao analisarmos o item (1), percebemos que todos os seis professores conseguiram *estabelecer relações/comparações entre os padrões geométricos e perceberam e expressaram tais regularidades* por meio do desenho das figuras solicitadas, conforme exemplo da figura 5 seguinte:

Figura 13: Imagem da resposta do professor, protocolo E_1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Tal resultado está em consonância com as pesquisas apresentadas nas pesquisas de Santos (2008), Silva (2009) e Ferreira (2009), presentes, que verificaram que os pesquisados não apresentam dificuldades em responder qual o próximo termo da sequência.

Análise do Item (2)

Para analisarmos as respostas apresentadas pelos professores, dividimos este item em dois grupos: dos professores que não conseguiram expressar o padrão percebido e o daqueles que "tentam" expressar.

No Grupo 1 encontra-se o professor do protocolo E_1. O mesmo usa a linguagem corrente para se expressar, no entanto, não é uma explicação que dê indícios de como a sequência foi construída, conforme pode ser visto na imagem que segue.

Figura 14: Imagem da resposta do professor, protocolo E_1

2. Explique como você pensou para responder a questão 1.
Observei cada figura e percebi que havia um padrão.

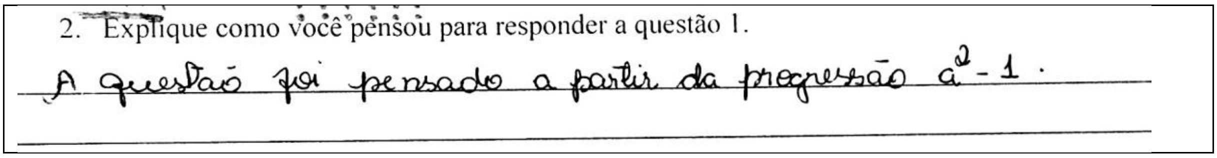
Fonte: Dados da pesquisa

Diante da justificativa apresentada por esse docente, não podemos determinar nenhum o tipo de padrão observado e, consequentemente o tipo de generalização.

Já no Grupo 2 encontram-se os professores dos protocolos M_1, M_2, E_2, E_3 e E_4. Eles conseguem expressar-se usando a linguagem corrente, conforme quadro a seguir.

Quadro15: Imagens das respostas dos professores dos protocolos M_1, M_2, E_2, E_3, e E_4

Protocolo do professor M_1
2. Explique como você pensou para responder a questão 1. Usando a sequência numérica dos números ímpares
Protocolo do professor M_2
2. Explique f4 como você pensou f5 para responder a questão 1. A CADA FIGURA AUMENTA UM PONTO NA BASE E OUTRO NA ALTURA.
Protocolo do professor E_2
2. Explique como você pensou para responder a questão 1. Bom, percebi que houve um aumento do número de linhas e colunas, explicando, de cada figura o último ponto
Protocolo do professor E_3
2. Explique como você pensou para responder a questão 1. AUMENTA UMA LINHA E UMA COLUNA “Aumenta uma linha e uma coluna”
Protocolo do professor E_4


2. Explique como você pensou para responder a questão 1.

A questão foi pensado a partir da progressão $a^2 - 1$.

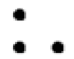
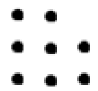
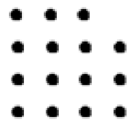
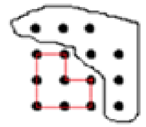
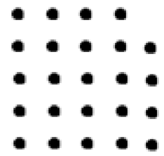
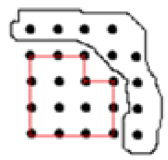
Fonte: Dados da pesquisa

Diante de tais justificativas, observamos que os pesquisados não conseguiram expressar claramente como visualizaram o padrão observado. Sendo assim, podemos concluir que os professores não tem problema em responder qual o próximo termo, porém, sentem dificuldade em escrever por meio de uma linguagem natural, como “viram” o padrão. Talvez tal dificuldade não aconteceria se fosse solicitado uma explicação de forma verbal. Segundo Ferreira (2009, p. 135), “Todas as duplas conseguiram expressar verbalmente o termo solicitado para a primeira sequência, porém, o registro da resposta em linguagem natural demonstrou ser um grande problema para alguns.”, resultados também mencionados nas dissertações de Santos (2008), Ferreira (2009) e Silva (2009). Sendo assim, diante das respostas apresentadas, nenhum professor conseguiu *expressar as regularidades presentes na sequência dada.*

Mas, por outro lado, percebemos nas respostas dos professores dos protocolos M_1 e E_4 detalhes que merecem destaque. Em ambas acreditamos que a construção da figura passa pela observação da quantidade de pontos.

A resposta apresentada por M_1 nos intrigou e na tentativa de entender o que o docente escreveu, conjecturamos que esse professor adotou um padrão recursivo, ou seja, aquele que sempre depende da figura anterior para a construção da próxima figura da sequência. O quadro a seguir ilustra nossa interpretação de como o professor do M_1 visualizou o padrão.

Quadro 16: Nossa Interpretação para a sequência numérica citada pelo professor do protocolo M_1.

POSIÇÃO DA FIGURA	FIGURA	CONSTRUÇÃO DA FIGURA POR M_1
1		
2		 Figura1 acrescida de 5 pontos
3		 Figura 2 acrescida de 7 pontos
4		 Figura 3 acrescida de 9 pontos

Fonte: Autoria própria

Dessa forma, entendemos que esse docente desenvolveu uma *generalização próxima*, pois só conseguirá continuar a sequência mediante desenho. De igual forma, podemos inferir sobre os professores dos protocolos E_2, M_2 e E_3.

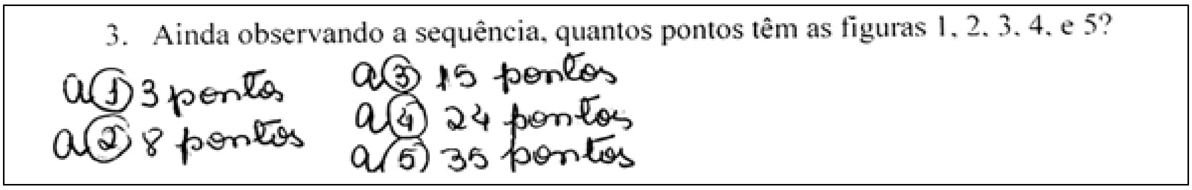
Já o docente do protocolo E_4, começou a fazer uso de uma linguagem mais sincopada, ou seja, aquela que utiliza símbolos matemáticos. Percebemos uma tentativa de expressar algebricamente o número de pontos de cada figura da sequência por meio da expressão $a^2 -1$. Como não indica o significado da variável *a*, não podemos inferir se refere ao *valor da posição ou, se está pensando no valor da posição mais 1.*

Dessa forma, entendemos que o docente do protocolo E_4 desenvolveu uma generalização distante, pois conseguirá continuar a sequência sem o uso do desenho.

Análise do Item 3

Ao observar as respostas dos protocolos, percebemos que os professores dos protocolos M_1, M_2, E_1, E_3 e E_4 responderam corretamente, como mostra o exemplo da figura seguinte.

Figura 15: Imagem da resposta do professor do protocolo E_4


3. Ainda observando a sequência, quantos pontos têm as figuras 1, 2, 3, 4, e 5?

a① 3 pontos a③ 15 pontos
a② 8 pontos a④ 24 pontos
a(5) 35 pontos

Fonte: Dados da pesquisa

Vale ressaltar que o professor do protocolo E_2 não respondeu apenas o número de pontos da figura 5, assim, acreditamos que esse fato ocorreu não por desconhecimento, mas sim por um lapso.

O objetivo desse item foi o de chamar atenção dos pesquisados entre a *quantidade de pontos e o número da posição das figuras.* Sendo assim, todos os pesquisados apresentaram os caracterizadores esperados: *expressaram regularidades ou invariâncias por meio de estruturas aritméticas da situação-problema dada* e, além disso, *desenvolveram uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.*

Análise do item 4

Este item foi dividido em 4 subitens. Para facilitar a apresentação da análise das respostas, agrupamos os subitens *a* e *b* e os subitens *c* e *d*.

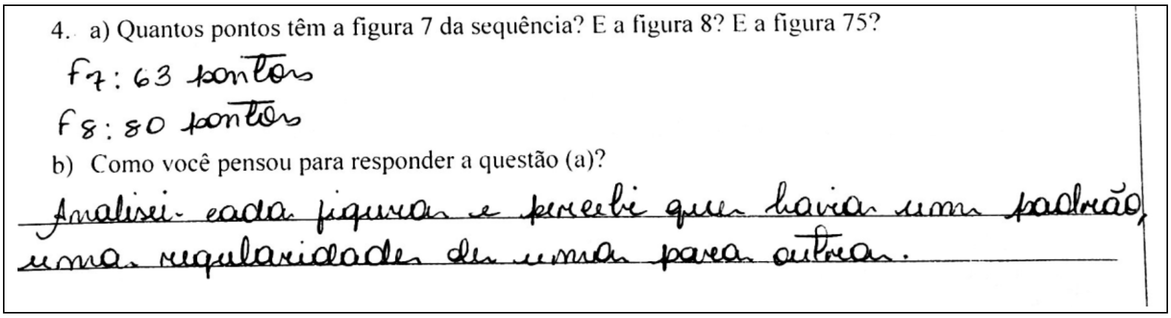
Análises do subitem (a) e (b)

Os objetivos traçados para esses subitens foi o de induzir o professor a descobrir uma “regra” para determinar a quantidade de pontos da figura 75 (Figura 16) e explicar como pensaram, abandonando (caso tenham adotado) o padrão recursivo. Dividimos as respostas em dois grupos:

Grupo 1: Professores que desenvolveram uma generalização próxima.
Grupo 2: Professores que desenvolveram uma generalização distante.

No grupo 1 encontra-se o professor do protocolo $E_{1,}$ que não conseguiu determinar a quantidade de pontos da figura 75 (Figura 16). Como ilustra a figura a seguir.

Figura 16: Imagem da resposta do professor do protocolo E_1



4. a) Quantos pontos têm a figura 7 da sequência? E a figura 8? E a figura 75?

F7: 63 pontos

F8: 80 pontos

b) Como você pensou para responder a questão (a)?

Analisei cada figura e percebi que havia um padrão, uma regularidade de uma para outra.

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com a resposta apresentada por E_1 no item (b), inferimos que esse professor tenha adotado um padrão recursivo, quando afirma ter "[...] uma regularidade de uma para outra." Desse modo, percebemos que para encontrar o número de pontos da figura, o mesmo depende do número de pontos da figura anterior. No quadro seguinte, exemplificamos o que, nesse caso, seria este tipo de padrão.

Quadro 17: Visualização do possível pensamento recursivo do professor.

Figura	Número de pontos		Número de pontos
1	3		3
2	8	+ 5	3 + 5
3	15	+ 7	8 + 7
4	24	+ 9	15 + 9
5	35	+ 11	24 + 11
6	48	+ 13	35 + 13
7	63	+ 15	48 + 15
8	80	+ 17	63+ 17

Fonte: Autoria própria

Podemos perceber na ilustração que esse modo de contagem, fornece a quantidades de pontos das figuras solicitadas para posições próximas, mas, vai dificultando à medida que vão sendo solicitadas posições mais distantes.

Acreditamos que por este motivo, o docente do protocolo E_1 não conseguiu determinar a quantidade de pontos da figura 75 (Figura 16), pois necessitaria desenhar ou contar todos os pontos.

Dessa forma, como o docente não conseguiu descobrir uma regra para contar o número de pontos em qualquer posição, inferimos que o mesmo não conseguiu atingir *os caracterizadores esperados por nós para estes itens, ou seja, estabelecer relações/comparações entre padrões geométricos, que pudessem desenvolver a generalização distante, não percebeu nem tentou expressar as estruturas aritméticas da situação-problema e, por fim, não desenvolveu uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.*

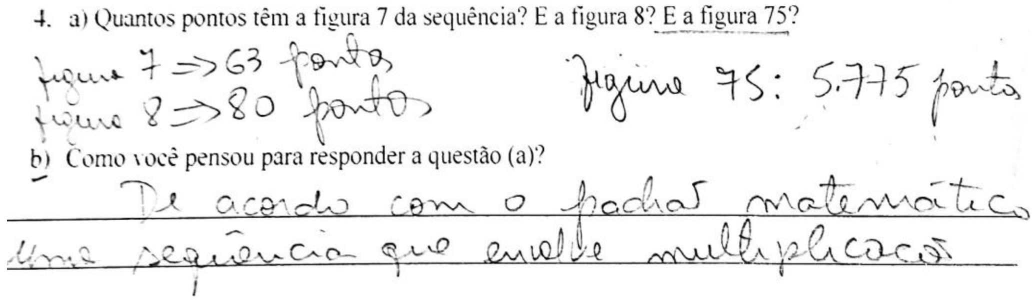
No grupo 2 encontram-se os professores, que ao contrário do professor do protocolo E_1, encontraram uma regra para contar o número de pontos da figura 75 (Figura 16). No entanto, tivemos que subdividir esse grupo em dois casos:

Caso 1: a regra obtida indica corretamente o número de pontos.
Caso 2: a regra obtida não indica corretamente o número de pontos.

Estão no primeiro caso os professores dos protocolos M_1 e M_2, pois responderam corretamente a quantidade de pontos das figuras solicitadas, como pode ser visto no quadro seguinte:

Quadro 18: Imagens das respostas dos protocolos M_1 e M_2.

Protocolo do professor M_1



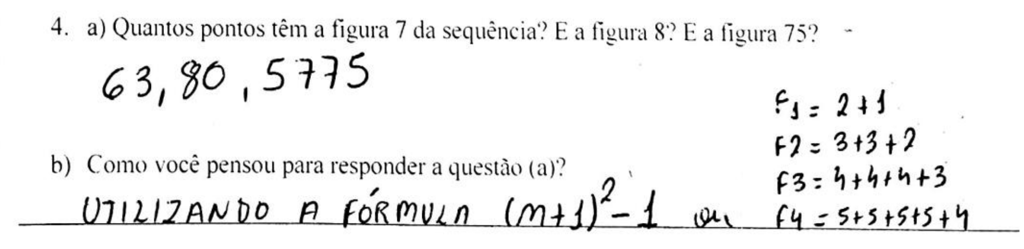
4. a) Quantos pontos têm a figura 7 da sequência? E a figura 8? E a figura 75?

figura 7 => 63 pontos
figura 8 => 80 pontos
figura 75: 5.775 pontos

b) Como você pensou para responder a questão (a)?

De acordo com o padrão matemático uma sequência que envolve multiplicação

Protocolo do professor M_2



4. a) Quantos pontos têm a figura 7 da sequência? E a figura 8? E a figura 75?

63, 80, 5775

b) Como você pensou para responder a questão (a)?

UTILIZANDO A FÓRMULA $(n+1)^2 - 1$ ou

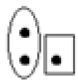
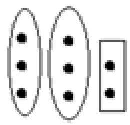
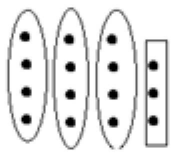
$F_1 = 2+1$
$F_2 = 3+3+2$
$F_3 = 4+4+4+3$
$F_4 = 5+5+5+5+4$

Fonte: Dados da pesquisa

Por meio das justificativas do subitem (b) percebemos que o docente do protocolo M_1 não consegue expressar por escrito a regra que pensou para chegar ao resultado de que na figura 75 (Figura 16) tem 5775 pontos.

Já o professor do protocolo M_2, antecipou o que previmos para os subitens 4(c) e 4(d) e o item 5. No que diz respeito aos subitens, o docente *percebeu e representou um* novo *modelo para a situação problema e expressou uma estrutura aritmética* não prevista por nós, conforme ilustra a figura seguinte:

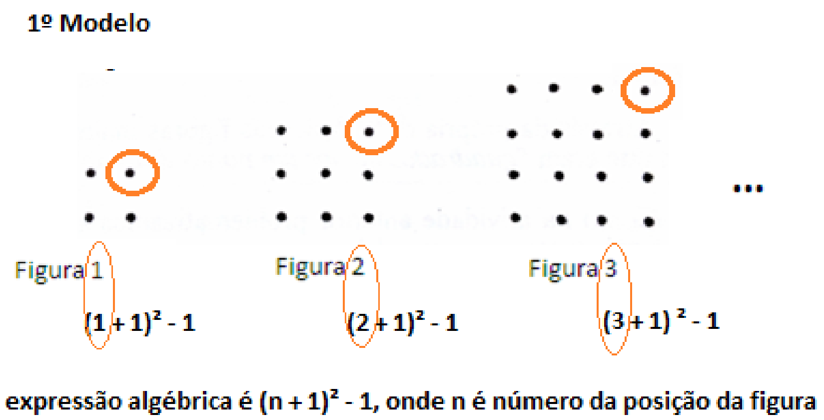
Figura 17: Possível modelo pensado pelo professor

NOTA DO PROFESSOR	NOSSA INTERPRETAÇÃO PARA O MODO DE "VER" DO PROFESSOR E DA POSSÍVEL REGRA
f1 = 2+1 f2 = 3+3+2 f3 = 4+4+4+3 f4 = 5+5+5+5+4	 F1 = 2 + 1 F1 = 1.2 + 1 F1 = (nº da posição da figura) . (nº da posição da figura + 1) + (nº da posição da figura)  F2= 3 + 3 + 2 F2 = 2 . 3 + 2 F2 = (nº da posição da figura) . (nº da posição da figura + 1) + (nº da posição da figura)  F3 = 4 + 4 +4 + 3 F3 = 3 . 4 + 3 F3 = (nº da posição da figura) . (nº da posição da figura + 1) + (nº da posição da figura)

Fonte: Autoria própria

O docente também antecipou o item 5, apresentando a expressão algébrica $(n+1)^2 - 1$ que traduz corretamente a regra do 1º modelo que pensamos ilustrado na figura seguinte.

Figura 18: Interpretação do item (5) por meio da expressão algébrica.



Fonte: Autoria própria

No segundo caso, estão presentes os professores dos protocolos E_2 e E_3, que conseguiram chegar a uma generalização distante, porém a regra obtida por eles, não indica corretamente o número de pontos, como mostra o quadro que segue:

Quadro 59: Imagens das respostas dos protocolos dos professores E_2 e E_3.

Protocolo do professor E_2
4. a) Quantos pontos têm a figura 7 da sequência? E a figura 8? E a figura 75? 7x7 − 1 = 48 8x8 − 1 = 63 75x75 = 5625 − 1 = 5624 b) Como você pensou para responder a questão (a)? Percebe que acada figura o número de linhas multiplicado pelas colunas subtrairmos 1.
Protocolo do professor E_3
4. a) Quantos pontos têm a figura 7 da sequência? E a figura 8? E a figura 75? 48, 63, 5624 b) Como você pensou para responder a questão (a)? NA LOGICA, Nº LINHAS X Nº DE COLUNAS SUBTRAINDO 1 UNIDADE "Na lógica, número de linhas x número de colunas e subtraindo 1 unidade".

Fonte: Dados da pesquisa

Apesar dos docentes E_2 e E_3 terem estabelecido uma relação entre o número da posição da figura e a quantidade de pontos da sequência, a mesma não é "correta". Neste caso, acreditamos que se os mesmos tivessem usado o item 3 para validar a regra encontrada, pois, teriam percebido o equívoco.

Análises dos subitens 4(c) e 4(d)

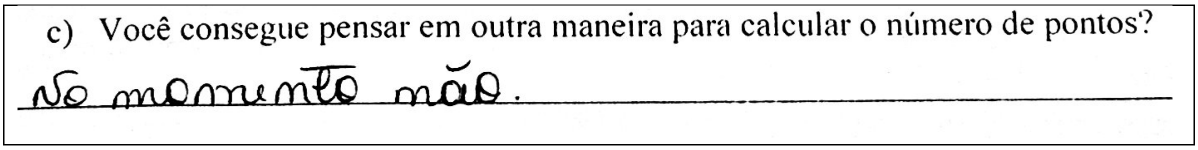
Os objetivos traçados para esses subitens foi o de induzir o professor a descobrir um novo modelo e, consequentemente, uma nova "regra" para determinar a quantidade de pontos da figura 75 (Figura 16), explicando como pensaram. Dividimos as respostas em dois grupos:

Grupo 1: Grupo dos professores que responderam "não"

Grupo 2: Grupo dos professores que responderam “sim”

No grupo 1 destacamos os professores dos protocolos E_1, E_3 e E_4, que não conseguiram visualizar o padrão de outra maneira, respondendo simplesmente *não*, ou como o professor do protocolo E_1, ilustrado na figura seguinte.

Figura 19: Imagem da resposta do docente do protocolo E_1.

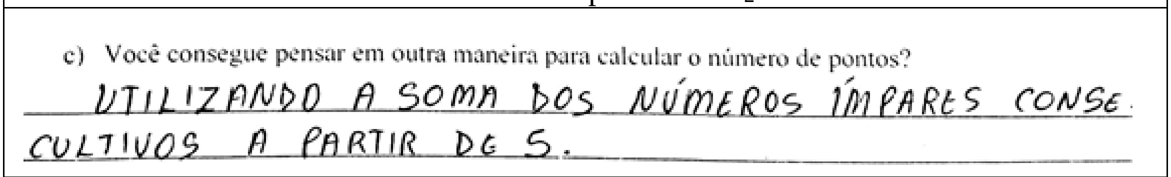
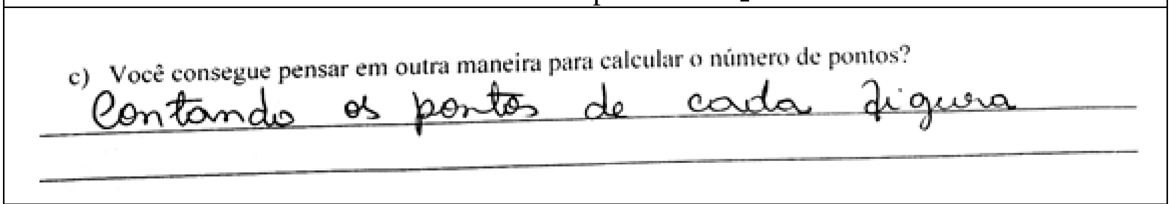
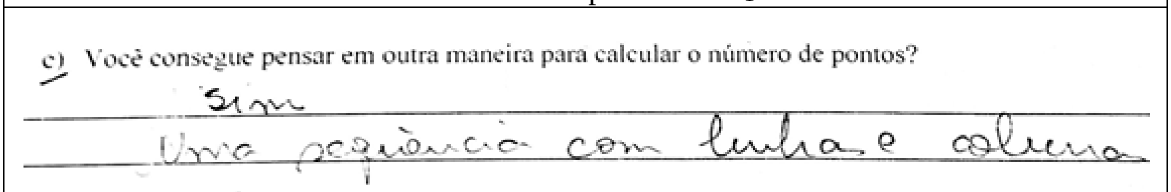

c) Você consegue pensar em outra maneira para calcular o número de pontos?
No momento não.

Fonte: Dados da pesquisa

Dessa forma, os docentes não perceberam, nem *produziram e expressaram um novo modelo para a mesma situação-problema.*

No grupo 2 estão presentes os professores dos protocolos M_1, M_2 e E_2, que, diferentemente do grupo 1, apresentaram outros modos de visualização para o padrão da sequência dada, como mostra o quadro seguinte.

Quadro 20: Imagens das respostas dos protocolos dos professores M_1, M_2 e E_2.

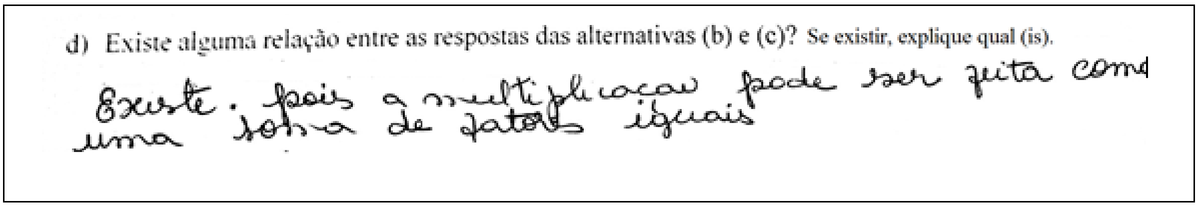
Protocolo do professor M_2
 c) Você consegue pensar em outra maneira para calcular o número de pontos? UTILIZANDO A SOMA DOS NÚMEROS ÍMPARES CONSECULTIVOS A PARTIR DE 5.
Protocolo do professor E_2
 c) Você consegue pensar em outra maneira para calcular o número de pontos? Contando os pontos de cada figura
Protocolo do professor M_1
 c) Você consegue pensar em outra maneira para calcular o número de pontos? Sim Uma sequência com linha e coluna

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com as respostas apresentadas, foi possível concluir que os professores dos protocolos M_2 e E_2 utilizaram um pensamento recursivo para expressar o outro modelo solicitado. Supomos então, que o modo de "ver" o padrão destes docentes é o mesmo apresentado no Quadro 9.

Quando perguntados da relação existente entre os modelos solicitados nos subitens (b) e (c), os docentes dos protocolos M_1 e M_2, responderam apenas com *sim*, afirmando existir uma relação mais não explicando qual seria. Já o pesquisado do protocolo E_2, tentou explicar em uma linguagem corrente, como pode ser visto na figura que segue:

Figura 20: Imagem da resposta do professor do protocolo E_2.


d) Existe alguma relação entre as respostas das alternativas (b) e (c)? Se existir, explique qual (is).

Existe. pois a multiplicaçao pode ser feita como uma soma de fatores iguais

Fonte: Dados da pesquisa

No entanto, não tivemos como inferir nada sobre a resposta apresentada, pois não ficou claro para nós o que o docente quis dizer com "a multiplicação pode ser feita como uma soma de fatores iguais" quando relacionado com o item 4(b) em que ele escreveu: "Percebe que a cada figura o número de linhas multiplicado pelas colunas subtrairmos 1."

Vale ressaltar que o docente M_2, no item 4(b), apresentou um novo modelo conforme foi ilustrado na figura 9, nos levando a inferir que o mesmo pensou de três modos diferentes. Neste sentido, concluímos que apenas esse docente apresentou os caracterizadores esperados para estes subitens, que era o de *produzir vários significados para uma mesma expressão numérica, transformando-a em outra mais simples*.

Análise do Item (5)

Nesse tópico, esperamos que o professor consiga expressar algebricamente uma lei de formação para a sequência dada e, consequentemente desenvolver uma generalização algébrica. Aqui também separamos as respostas em dois grupos:

Grupo 1: Professores que não expressaram algebricamente a regra

Grupo 2: Professores que expressaram algebricamente a regra

No primeiro grupo, encontram-se os protocolos dos professores E_1 e M_1, que apresentaram suas respostas por meio de uma linguagem corrente, como pode ser visto na figura a seguir:

Quadro 21: Imagens das respostas dos professores do protocolo E_1 e M_1.

Protocolo do professor E_1
5. Quantos pontos têm uma figura numa posição qualquer? Não sei, pois não consegui generalizar.
Protocolo do professor M_1
5. Quantos pontos têm uma figura numa posição qualquer? A própria figura, multiplicada por ela acrescido de dois

Fonte: Dados da pesquisa

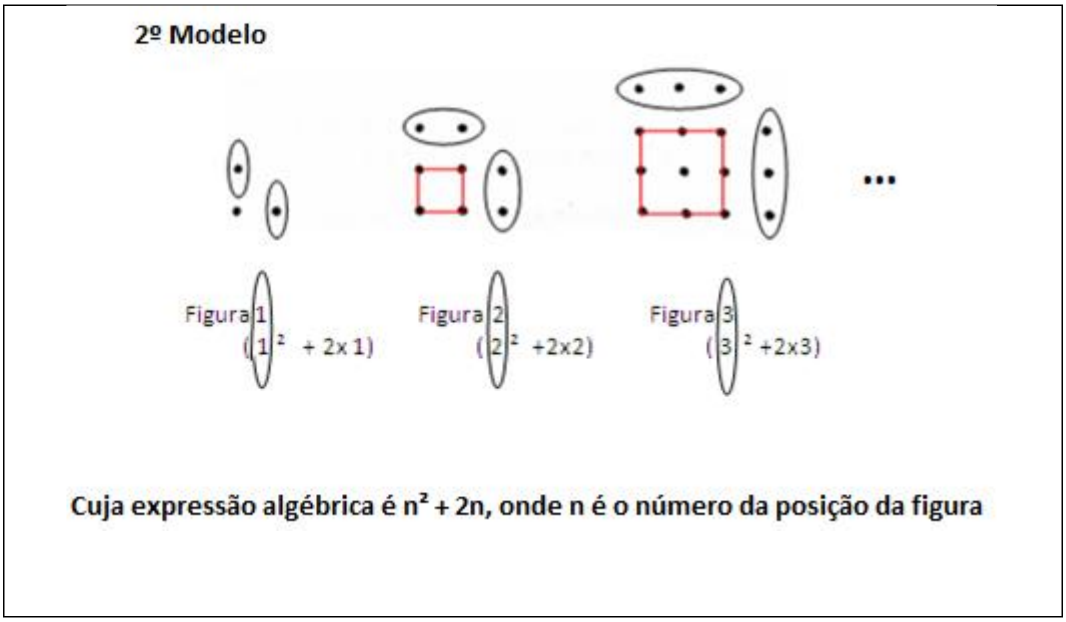
O docente do protocolo E_1 nos chamou atenção, pois, mesmo no decorrer da atividade não tendo sido mencionado o termo *generalizar*, o mesmo a usa na sua justificativa, demonstrando ter consciência de que este seria o resultado esperado por nós. Além disso, neste protocolo o docente evidenciou que a generalização do padrão seria o caminho para chegar na expressão algébrica. Segundo Baqueiro (2016):

> Uma das dificuldades dos estudantes em expressar em linguagem natural e algébrica a generalização de um padrão observado se relaciona com o modo como o aluno visualiza o padrão, o que pode levá-lo a encontrar um padrão que não é algebricamente útil, como no caso da abordagem recursiva, que é aquela em que aluno faz uso da diferença entre os termos da sequência. (p. 192).

Esta observação feita pela autora pode ser estendida para o caso do docente do protocolo E_1, pois de acordo com a resposta apresentada (quadro 20), percebemos que como não abandonou o padrão recursivo não conseguiu generalizar e, por esse motivo, não atingiu o objetivo desejado para esse item, que era o de desenvolver a *generalização algébrica*.

Já o docente do protocolo M_1, nos chamou atenção, pois apesar de não ter conseguido escrever uma expressão algébrica para a regra que pensou para calcular o número de pontos da figura 75 (Figura 16), o mesmo tenta expressar em linguagem natural, a qual acreditamos esteja relacionada com o 2º modo de contar previsto por nós, tal como na figura seguinte:

Figura 21: Interpretação do item (5) por meio da expressão algébrica.



Fonte: autoria própria.

Nesse caso, uma maneira de escrever a regra seria: *o número da posição da figura multiplicado por ele mesmo acrescido de duas vezes o número da posição da figura*. A autora Santos (2008), citando Zaskis & Liljedahl (2012, p. 400) afirma que:

> "Existe um vão entre a habilidade para expressar generalidades [...] e sua habilidade para empregar notação algébrica confortavelmente". Muitos alunos mostraram pensar algebricamente, mas nenhum deles empregou uma notação algébrica formal. Os estudantes explicitavam, por meio da língua natural, uma generalização. (p. 110).

Esta observação feita pela autora pode ser estendida para o caso do docente do protocolo M_1, pois de acordo com a resposta apresentada (quadro 21), percebemos que o mesmo desenvolveu a *generalização distante*, mas teve dificuldade de expressar-se algebricamente.

No grupo 2, estão presentes os protocolos dos professores M_2, E_2, E_3 e E_4 que tentaram expressar algebricamente o número de pontos para uma figura numa posição qualquer. Como quadro que segue:

Quadro 6: Imagens das respostas dos protocolos dos professores M_2, E_2, E_3 e E_4

Protocolo do professor M_2
5. Quantos pontos têm uma figura numa posição qualquer? $(m+1)^2 - 1$
Protocolo do professor E_2
5. Quantos pontos têm uma figura numa posição qualquer? $p = L \times C - 1$ onde C = colunas e o número de linhas.
Protocolo do professor E_3
5. Quantos pontos têm uma figura numa posição qualquer? $P = (L \times C) - 1$ L → LINHA C → COLUNA P → PONTOS
Protocolo do professor E_4
5. Quantos pontos têm uma figura numa posição qualquer? $a_n = n^2 - 1$

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando tais respostas, constatamos que as expressões apresentadas nos protocolos E_2 e E_3, não expressam a relação funcional existente entre o número da posição da figura e o número de pontos, condição essa que generalizaria a quantidade do número de pontos numa posição qualquer. Já os professores dos protocolos E_4 e M_2, conseguem expressar tal relação. Vale *et al* (2011), afirmam que "esta descoberta da lei de formação já envolve um tipo de pensamento relacional que conduz ao conceito de função – relação funcional, que conduzirá a uma expressão geral ou termo geral da sequência [...]." (p. 29).

No entanto, o professor do protocolo E_4 escreve a expressão algébrica $a_n = n^2 - 1$, que não está em consonância com os cálculos do subitem 4 (a), onde percebemos que em suas contas tomam o *valor da posição da figura mais 1* e eleva ao quadrado. Neste caso, uma expressão coerente seria $a_n = (n+1)^2 - 1$, onde "n" seria o valor da posição. Assim sendo, concluímos que esse docente, desenvolveu a *generalização algébrica*, no entanto, teve dificuldade para expressá-la.

Já o professor do protocolo M_2, escreve a expressão algébrica $(n + 1)^2 -1$ que está inteiramente em consonância com a regra percebida pelo mesmo no subitem 4 (a), e também, com o que havíamos previsto para este item, nos levando a concluir que o mesmo desenvolveu a *generalização algébrica*.

Após as análises desta parte do questionário, pudemos concluir, de um modo geral, que os professores não sentem dificuldades em determinar o próximo termo da sequência, seja desenhando ou contando os pontos da figura. No entanto, os mesmos possuem grandes dificuldades em expressar por meio de uma linguagem corrente a forma como estão pensando para encontrar os termos da sequência. Tal fato, foi constatado nas pesquisas de Modanez (2003), Silva (2009), Ferreira (2009) e Santos (2008).

Estas dificuldades se relacionam com a maneira pela qual os docentes visualizam o padrão, que na maioria enxergaram recursivamente, o que interferiu no desenvolvimento das generalizações, pois, apenas um pesquisado conseguiu desenvolver uma generalização algébrica, representando corretamente por meio da linguagem algébrica a regra encontrada para a sequência dada na atividade.

Diante dos resultados e da análise das respostas dada pelo professores, fizemos o emparelhamento com o quadro teórico estudado. Constatamos que dos seis docentes que responderam a parte IV do questionário, todos apresentaram algum dos caracterizadores do Pensamento Algébrico, como exposto no quadro seguinte:

Quadro 73: Caracterizadores do Pensamento Algébrico revelados pelos professores pesquisados

PROTOCOLOS	CARACTERIZADORES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO								TIPOS DE GENERALIZAÇÃO		
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	Próxima	Distante	Algébrica
M_1	x					x	X	x	x	x	
M_2	x	x	x			x	X	x	x	x	X
E_1	x					x	X		x		
E_2	x	x				x	X	x	x	x	
E_3	x					x	X	x	x	x	
E_4	x	x				x	X	x		x	X

Fonte: autoria própria.

PARTE V – Opinião dos pesquisados sobre a atividade com padrões matemáticos

A quinta e última parte do questionário buscou analisar a opinião dos pesquisados com relação à atividade aplicada. As respostas estão dispostas no quadro seguinte.

Quadro 84: Respostas da parte V dos pesquisados.

PROTOCOLOS	RESPOSTAS			
	1. O que você achou desta atividade?	2. Você já fez alguma atividade deste tipo?	3. Você aplicaria essa atividade com seus alunos?	4. Você considera que este tipo de atividade pode ser aplicado para alunos do 5º e 6º ano?
M_1	Fácil	Não	Sim	Não
M_2	Fácil	Sim	Sim	Sim
M_3	Não respondeu	Não respondeu	Não respondeu	Não respondeu
E_1	Teve dificuldade	Sim	Não	Sim
E_2	Fácil	Não	Não	Sim
E_3	Teve dificuldade	Não	Não	Não
E_4	Teve dificuldade	Não	Sim	Não

Fonte: Autoria própria

Tais respostas indicam que 42,86% dos pesquisados julgaram fácil esse tipo de atividade, justificando das mais diversas formas, como ilustrado no quadro seguinte.

Quadro 25: Justificativa dos professores que acham a atividade da parte IV fácil.

Protocolo do professor E_2
Justifique: Achei interessante, pois me ajudou a ver o problema com o outro ângulo.
Protocolo do professor M_1
Justifique: Encontrei um método prático e rápido
Protocolo do professor M_2
Justifique: COSTUMO ESTUDAR QUESTÕES DESTE TIPO PARA CONCURSO "RACIOCÍNIO LÓGICO"

Fonte: Dados da pesquisa

Outros 42,86% dos professores reconheceram que sentiram dificuldades e justificaram que as mesmas estavam em calcular o número de pontos ou em generalizar.

Quando perguntados se já tinham feito atividades deste tipo, dois terços deles responderam que *não* e apresentaram as seguintes justificativas:

Quadro 26: Justificativa dos professores que não aplicariam a atividade com seus alunos

Protocolo do professor E_1
Justifique. Por não ter trabalhado esse tipo de atividade durante a graduação, não sinto-me segura para aplica-la.
Protocolo do professor E_2
Justifique. Creio que eles não conseguiriam, pois não foram levados a compreender, que a matemá ca, não há regras, sequencias ou ordem de inter pretação.
Protocolo do professor E_3
Justifique. MEUS ALUNOS TERIAM DIFICULDADE DE INTERPRETAÇÃO DOS PROBLEMAS

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando as respostas dos protocolos E_2 e E_3, entendemos que os mesmos desconhecem a importância do tema como caminho para desenvolver o Pensamento Algébrico dos alunos. Segundo Vale *et al* (2011):

> A procura de padrões é uma «forte» estratégia de resolução de problemas. A resolução de problemas não rotineiros e não tradicional é um poderoso caminho que envolve os alunos na exploração e na formalização de padrões, levando-os a conjecturar, verbalizar relações entre os vários elementos do padrão e a generalizar. Trabalhar a álgebra através da resolução de problemas envolvendo padrões é uma possível abordagem ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico no ensino básico. (p. 14).

Oliveira (2016) e Carvalho (2016), por exemplo, verificaram em suas pesquisas que alunos do 9º e do 5º ano do ensino fundamental conseguiram resolver atividades deste tipo e *desenvolveram a generalização distante*. A dificuldade foi no momento de expressar algebricamente o padrão. Os alunos do 5º ano escreveram em linguagem natural o que já é esperado para esse nível.

Os professores dos protocolos M_2 e E_1 que disseram “sim” informaram que fizeram em provas de concursos e em um curso de pós-graduação, respectivamente.

Com relação a questão 3, metade deles aplicariam com seus alunos e a outra metade não, as justificativas para as respostas encontram-se expostas no quadro a seguir.

Quadro 27: Justificativa dos professores que aplicariam a atividade com seus alunos

Protocolo do professor M_2
Justifique. DESENVOLVE O RACIOCÍNIO DO ALUNO, FAZ COM QUE ESTIMULE O PENSAMENTO. E QUESTÕES DESTE TIPO GERA MAIS POLÊMICA EM SALA DE AULA.
Protocolo do professor E_4
Justifique. Por estimular o raciocínio e a lógica
Protocolo do professor M_1
Justifique. Porque estimula o raciocínio lógico

Fonte: Dados da pesquisa

Silva (2009), em sua pesquisa chegou à seguinte conclusão:

> [...] pois todos os professores se mostraram interessados em trabalhar atividades semelhantes com seus alunos, como também todos eles comentaram o caráter investigativo das atividades e enfatizaram o seu potencial no desenvolvimento do raciocínio. (p.95)

Para o autor, tais "atividades que envolvem observação e generalização de padrões são pouco trabalhadas [...], porém, isso não ocorre pela desaprovação dos professores em relação a tais atividades, mas sim pelo desconhecimento do assunto." (p. 95)

Na questão 4, quando perguntados se aplicariam este tipo de atividade para alunos do 5º e 6º ano, metade deles afirmaram que aplicariam e deram as seguintes justificativas:

Quadro 28: Justificativa dos professores que aplicariam a atividade com alunos do 5º e 6º ano.

Protocolo do professor M_2
Justifique. É FUNDAMENTAL, POIS IRÁ MELHORAR NO DESEMPENHO DAS ATIVIDADES EM SALA DE AULA E FORA DELA. NOSSOS ALUNOS DEVEM SER PREPARADOS PARA O QUE ELES VÃO ENFRENTAR NO FUTURO. PARA QUE POSSAM TER SUCESSO EM DIVERSOS EXAMES COMO: OBMEP, ENEM, CONCURSOS, DENTRE OUTROS.
Protocolo do professor E_1
Justifique. Desde que seja bem planejada e com objetivos bem definidos.
Protocolo do professor E_2
Justifique. Pois não fizemos nada além de utilizar as quatro operações.

Fonte: Dados da pesquisa

A outra metade respondeu que não aplicariam, com as seguintes justificativas:

Quadro 99: Justificativa dos professores que não aplicariam a atividade com alunos do 5º e 6º ano.

Protocolo do professor M_1
Justifique. Porque apresentam um grau de dificuldade bastante elevado.
Protocolo do professor E_3
Justifique. POIS É MUITO COMPLICADO
Protocolo do professor E_4
Justifique. Por apresentarem dificuldades em perceber a lógica nas questões desse nível e ainda não terem visto assuntos que promovam essa percepção.

Fonte: Dados da pesquisa

Segundo Fiorentini *et al* (2005), a iniciação ao desenvolvimento do pensamento pode ocorrer já desde os primeiros anos de escolarização. Citando o educador matemático Ken Milton (1989) os autores afirmam que: "aquilo que ensinamos em aritmética e a forma como ensinamos tem fortes implicações para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico". (p. 5)

CAPÍTULO V
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A seguir, apresento minhas considerações finais, baseadas numa visão ampla do processo da pesquisa, levando em consideração as análises já realizadas.

De acordo com a metodologia utilizada, e considerando o pequeno número de professores que participaram da pesquisa, enfatizo que este trabalho apresenta características de um estudo qualitativo, e portanto, não possui caráter generalizador.

Na busca de "analisar os caracterizadores do Pensamento Algébrico revelados por professores de Matemática, por meio de atividades envolvendo padrões", procuramos respostas para o questionamento: *Quais os caracterizadores do Pensamento Algébrico são revelados por professores de Matemática ao resolverem atividades envolvendo padrões?*

No intuito de alcançar o objetivo, bem como responder a pergunta que norteou a pesquisa utilizamos como instrumento de coleta dos dados um questionário de caráter misto, que foi estruturado em cinco partes. O trabalho contou com a participação de sete professores de matemática de dois municípios distintos, próximos a cidade de Alagoinhas/Ba. Sendo que em um município aplicamos o questionário com professores da Rede Municipal e no outro da Rede Estadual.

Julgamos que o instrumento utilizado para a obtenção dos dados, foi adequado. Porém, os professores, em sua grande maioria reclamaram que o questionário era muito extenso e cansativo. Por esse motivo, sugerimos que para uma possível replicação desse questionário o melhor é aplica - ló em dias diferentes.

Para análise dos itens da parte IV fizemos o emparelhamento e a associação entre as resoluções apresentadas pelos professores nos questionários e o quadro dos caracterizadores de Fiorentini *et al* (2005), por meio da técnica chamada de emparelhamento ou associação, que analisa os dados obtidos no questionário a partir de um teórico já prévio e associa ou emparelha o quadro teórico com o material obtido, verificando as correspondências existentes entre eles Lorenzato (2010).

Ao analisar a primeira parte do questionário, que teve como objetivo identificar o perfil profissional dos pesquisados, destacamos que a maioria dos professores possui formação na área de matemática, apenas um deles, é formado em pedagogia. Percebemos também que a maioria trabalha com ensino fundamental e médio.

A segunda parte do questionário objetivou verificar qual a concepção algébrica dos professores de matemática ao observarem resoluções de questões envolvendo cálculos algébricos e/ou aritméticos. Apresentamos aos professores uma situação problema com duas soluções corretas distintas. A primeira solução possui uma resolução envolvendo incógnitas e, na segunda, apenas cálculos numéricos. Todos optaram pela solução 1 e aproximadamente 71,4% dos docentes justificaram que para a resolução ser algébrica era necessária a presença da incógnita e/ou variável. Estes dados reforçam a ideia de Fiorentini *et al* (2005, p. 4), ao afirmarem que tradicionalmente o ensino da álgebra se sustenta na crença de que o Pensamento Algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal ou através da manipulação da linguagem simbólica da álgebra.

Tais resultados nos leva a inferir que devemos investir na formação continuada desses professores, pois a maioria ainda não consegue perceber que o Pensamento Algébrico vai além da linguagem algébrica simbólica, uma vez que Fiorentini *et al* (1993) afirmam não existir uma única maneira de expressar o Pensamento Algébrico, pois, o mesmo pode se manifestar por meio de uma linguagem aritmética, geométrica ou algébrica, estritamente simbólica.

Já na terceira parte do questionário que buscou saber dos pesquisados se já ouviram falar de padrões matemáticos alguma vez durante a sua trajetória enquanto discentes e/ou docentes, chegamos à conclusão que os professores desconhecem o tema abordado, e que entendem o padrão matemático, como um conjunto de regras a serem seguidas.

A parte IV analisou os caracterizadores do Pensamento Algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) por meio de uma atividade exploratório-investigativa envolvendo Padrões Matemáticos e os tipos de generalização revelados nas justificativas dadas pelos docentes. Apesar da maioria dos professores ter demonstrado nunca ter trabalhado questões desse tipo antes, os mesmos mostraram disposição para responder.

Sendo assim, consideramos que atividades envolvendo padrões possuem um grande potencial para o estudo dos aspectos do Pensamento Algébrico, levando em consideração que os docentes revelaram 6 dos 8 caracterizadores esperados foram eles:

- Estabelecer relações/comparações entre padrões geométricos;
- Perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação problema;
- Produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema ou expressão numérica;

- Desenvolver algum tipo de processo de generalização;
- Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias;
- Desenvolver uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.

Os dois caracterizadores não apresentados foram:

- Transformar uma expressão numérica em outra mais simples.
- Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas.

Percebemos que esses mesmos caracterizadores não foram apresentados nas pesquisas de Carvalho (2016), Oliveira (2016) e Santos (2016), assim como as pesquisadoras, continuamos sugerindo uma nova pesquisa em que esses caracterizadores não apresentados possam vir a ser desenvolvidos.

Com relação ao processo da generalização, percebemos que de um modo geral os professores não sentem dificuldades em determinar o próximo termo da sequência, seja desenhando ou contando os pontos da figura. No entanto, os mesmos possuem grandes dificuldades em expressar por meio de uma linguagem corrente a forma como estão pensando para encontrar os termos da sequência.

Esse acontecimento nos leva a corroborar com Modanez (2003) e Fiorentini *et al* (2005) quando afirmam que devemos investir mais na formação continuada do professor, no intuito de melhor capacita-ló para trabalhar essas atividades, uma vez que é fundamental o papel mediador ou orientador do professor junto aos seus alunos.

Com a análise dos dados percebemos que a maioria dos docentes desenvolveram algum tipo de generalização. Apenas o professor do protocolo E1, não conseguiu abandonar o padrão recursivo, desenvolvendo apenas a generalização próxima, os outros seis docentes desenvolveram a generalização distante, desses apenas dois conseguiram desenvolver uma generalização algébrica, sendo que apenas um deles conseguiu expressar algebricamente a lei de formação coerente com a sequência.

Deste modo, compreendemos que os próprios professores sentem dificuldades em expressar algebricamente e chegar a uma generalização. No entanto, como mediador da aprendizagem o docente deve ter um domínio maior do que será ensinado. Acreditamos que as atividades envolvendo padrões possam ajudar tanto no desenvolvimento do professor quanto do aluno, uma vez que segundo Vale as atividades envolvendo padrões são de suma importância para. Vale *et al* (2011, p.24) afirma que “a descoberta de padrões contribui para o desenvolvimento da abstração e de outras capacidades matemáticas, designadamente o Pensamento Algébrico. Contudo, para que o docente possa aplicar as atividades envolvendo padrões em sala de aula é preciso que o mesmo compreenda a atividade e quebre o paradigma de que a álgebra só se desenvolve com a utilização de letras, ou seja, o docente precisa compreender a existência e importância do Pensamento Algébrico.

A pesquisa deixou evidente que não só os professores pesquisados, mas sim todos os professores devem estar sempre à procura de novos conhecimento, estudando e se aprimorando cada dia para assim oferecer um ensino digno e de qualidade aos seus alunos que serão o futuro da sociedade.

Para futuras pesquisas levantamos os seguintes questionamentos:

- As formações de professores estão refletindo sobre o Pensamento Algébrico?
- De que forma poderia ser repensado a atividade da parte IV do questionário de modo a permitir que futuros pesquisados venham a explicitar os caracterizadores: transformar uma expressão numérica em outra mais simples e interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas?

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. M. M. *Estratégias de Generalização de Padrões de alunos do Ensino Fundamental do ponto de vista de seus Professores*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

BAQUEIRO, G. D. S. *Achados sobre generalização de padrão ao “garimpar” pesquisas brasileiras de educação matemática (2003-2013).* Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2016. São Paulo.

BAQUEIRO, Grace D. S; MACHADO, Silvia D. A. *O Projeto Emapol Do Ponto De Vista Do Tema Observação E Generalização De Padrões:* Uma Análise Do Livro Didático Adotado Em Uma Escola Pública Municipal Na Bahia- Brasil. UNEB/CampusII/Brasil – CIBEM, 2013.

CARVALHO, Gabriele Souza de. *Indícios de Pensamento Algébrico em alunos do 5º ano das séries iniciais.* Alagoinhas, 2016.

CASTRO, T. F. de C. *Aspectos do Pensamento Algébrico revelados por “professores-estudantes” de um curso de formação continuada em Educação Matemática.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

DEVLIN, K. *Matemática:* a ciências dos padrões. Tradução por Alda Maria Durães. Porto, Portugal: Porto, 2002.

FERREIRA, C. R. de M. *Os alunos do 1º ano do ensino médio e os padrões:* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

FERREIRA, M. R. C A; MACHADO, A.D.S. *Observação e a Generalização de Padrões e Seus Benefícios aos Alunos do Ensino Médio*. 2008 Disponível em: < http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/145-1-A-GT8_ferreira_ta.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2016.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO, E. M. *Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do Pensamento Algébrico.* 2005. Disponível em: <ftp://ftp.cefetes.br/cursos/Matematica/Alex/06-Um%20estudo%20das%20potencialidades%20pedagogicas.pdf>. Acesso em: 1 jul. 2015.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. *Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar.* Pro-Posições, Campinas, FE/Unicamp, v. 4, n. 1 p.78-91, mar. 1993. Disponível em: <http://www.proposicoes.fe.unicamp.br/proposicoes/textos/10-artigos-fiorentinid_etal.pdf>. Acesso em: 1 jul. 2015.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sergio. *Investigação em educação matemática:* percursos teóricos e metodológicos. 3ª ed. Revista, Campinas, SP: Autores Associados, 2009. – (Coleção formação de professores).

GIL, Antonio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 5ª Ed., São Paulo, SP: Atlas, 2010.
LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. Fundamentos de metodologia científica. 7. Ed – São Paulo: Atlas, 2010.

MODANEZ, L. *Das sequencias de padrões geométricos à introdução ao Pensamento Algébrico.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2003. São Paulo.

OLIVEIRA, Jadna Araújo de. *Aspectos do Pensamento Algébrico revelados por estudantes do Ensino Fundamental II em atividades envolvendo padrões matemáticos.* Alagoinhas, 2016.

POLYA, G. *A. Arte de Resolver Problemas*. Tradução e adaptação por Heitor Lisboa de Araújo. Editora Interciência. Rio de Janeiro, 2006.

SANTOS, Ana Teresa Ferreira dos. *Aspectos do Pensamento Algébrico revelados por estudantes do curso de licenciatura em matemática da UNEB / CAMPUS II.* Alagoinhas, 2016.

SANTOS, J. G. *Observação e generalização de padrões:* um tema para investigação de professores sobre sua própria prática. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2008. São Paulo.

SILVA, R. S. *Oficina Experiências Matemáticas*: professores e a exploração de padrões. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2009. São Paulo.

SKOVSMOSE, O. *Cenários de Investigação.* Revista Bolema, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

VALE, I.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T; BORRALHO, A.; CABRITA, I.; BARBOSA, E. *Padrões em matemática:* uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico. Lisboa: Texto, 2011.

APÊNDICES

QUESTIONÁRIO

"Caro docente, o presente questionário tem como objetivo *analisar que aspectos do pensamento algébrico são explicitados nas resoluções dos professores do fundamental II.* Contamos com a sua colaboração respondendo a este questionário. Lembrando que sua identidade será mantida em sigilo, sem nenhuma possibilidade de quebra de segurança dos seus dados. Desde já agradecemos a sua participação e contribuição para o progresso na educação matemática de seu município."

PARTE I: Seu perfil

1 – Qual a sua Formação Acadêmica?

( ) Licenciatura plena em Matemática. ( ) Magistério ( ) Outra. Qual? ____________________________.

2 – Qual (is) o(s) ano(s)/série(s) que leciona atualmente?

( ) 6º ( ) 7º ( ) 8º ( ) 9º ( )1ª EM ( ) 2ª EM ( ) 3ª EM

3 – Você já lecionou outro (os) ano(s) /série(s)? Qual (is)?

( ) 6º ( ) 7º ( ) 8º ( ) 9º ( )1ª EM ( ) 2ª EM ( ) 3ª EM

3 – A quanto tempo leciona matemática?

____

____

PARTE II: Leia o texto abaixo:

A professora Grace aplicou em sua turma o problema abaixo:

- Pensei em um número, multipliquei por 3, somei 25 e obtive 61. Que número pensei?

Ao verificar as respostas dadas pelos alunos, a professora percebeu duas soluções diferentes:

Solução 1

$$n\,.3 + 25 = 61$$
$$3n = 61 - 25$$
$$3n = 36$$
$$n = \frac{36}{3}$$
$$n = 12$$
$$resp\!: o\ número\ pensado\ foi\ 12.$$

Solução 2

$$61 - 25 = 36$$
$$36 : 3 = 12$$
$$resp\!: o\ número\ pensado\ foi\ 12.$$

Marque uma das alternativas de acordo com a sua opinião:

1) Você responderia usando qual solução: ( ) 1 ( ) 2 ( ) ambas soluções ( ) OUTRA. Qual?

2) Você considera a solução 2 uma *resolução algébrica*? ( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei

Justifique:

____

____

____

PARTE III: Outras questões:

1 - Você já ouviu falar em Padrões Matemáticos?

( ) Sim ( ) Não

2 – Caso a resposta da questão anterior tenha sido “sim”, explique o você que entende por Padrões Matemáticos.

____
____
____________.

3 – Enquanto discente você já estudou por meio de padrões matemáticos alguma vez?

( ) Não ( ) Sim. Onde?

( ) Ensino Fundamental I. Ano/Série ___________.

( ) Ensino Fundamental II. Ano/Série ___________.

( ) Ensino Médio. Ano/Série ___________.

( ) Ensino Superior. Semestre/Componente Curricular ___________.

De que forma?
____
____
____
____

4 - Enquanto docente você já trabalhou utilizando padrões matemáticos alguma vez?

( ) Não ( ) Sim. Onde?

( ) Ensino Fundamental I. Ano/Série ___________.

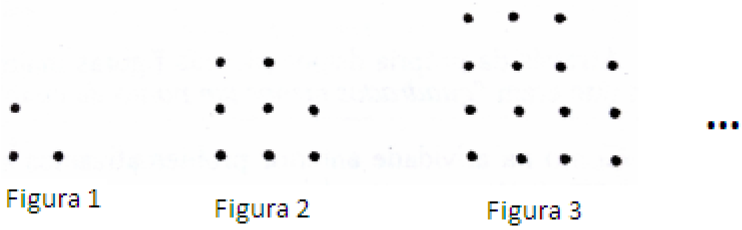
( ) Ensino Fundamental II. Ano/Série ___________.

( ) Ensino Médio. Ano/Série ___________.

( ) Ensino Superior. Semestre/Componente Curricular

PARTE IV: Leia atentamente a questão abaixo e responda os itens solicitados:

Observe a sequência abaixo:



1. Qual a próxima figura da sequência? E a seguinte? Desenhe.

2. Explique como você pensou para responder a questão 1.

---

3. Ainda observando a sequência, quantos pontos têm as figuras 1, 2, 3, 4, e 5?

4. a) Quantos pontos têm a figura 7 da sequência? E a figura 8? E a figura 75?

b) Como você pensou para responder a questão (a)?

---

c) Você consegue pensar em outra maneira para calcular o número de pontos?

---

d) Existe alguma relação entre as respostas das alternativas (b) e (c)? Se existir, explique qual(is).

PARTE V: Dê a sua opinião sobre a atividade que acabou de responder.

1. O que você achou desta atividade?

   (   ) Fácil   (   ) Tive dificuldades(   ) Difícil

Justifique:

____

____

____

____

2. Você já fez alguma atividade deste tipo antes?

   (   ) Não   (   ) Sim. Quando? ______________________

3. Você aplicaria essa atividade com seus alunos?

   (   ) Sim   (   ) Não.

Justifique.

____

____

____

____

4. Você considera que este tipo de atividade pode ser aplicada para alunos do 5º e 6º ano?

   (   ) Sim   (   ) Não.

Justifique.

____

____

____

____

____